

SÉRIE A, n° 4443
N° D'ORDRE
5291

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

François BARLIER

1^{re} THÈSE. — RECHERCHES SUR LA DÉTERMINATION ET L'UTILISATION DES ÉLÉMENTS
OSULATEURS DANS LA MÉCANIQUE DES SATELLITES PROCHES.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 1965 devant la Commission d'examen.

11 JUIN 1965

MM. RÖSCH

Président.

THIRY

KOVALEVSKY

MULLER

} *Examineurs.*

PARIS

GAUTHIER-VILLARS & C^{ie}, ÉDITEUR-IMPRIMEUR

Quai des Grands-Augustins, 55

1965

SÉRIE A, N° 4443

N° D'ORDRE

5291

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

François BARLIER

1^{re} THÈSE. — RECHERCHES SUR LA DÉTERMINATION ET L'UTILISATION DES ÉLÉMENTS
OSCULATEURS DANS LA MÉCANIQUE DES SATELLITES PROCHES.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le

1965 devant la Commission d'examen.

MM. RÖSCH

Président.

THIRY
KOVALEVSKY
MULLER

} *Examineurs.*

PARIS

GAUTHIER-VILLARS & C^{ie}, ÉDITEUR-IMPRIMEUR

Quai des Grands-Augustins, 55

—
1965

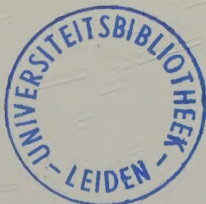
FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen..... M. ZAMANSKY .

G. JULIA.....	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	AMIEL.....	T	Chimie générale.
PRENANT.....	T	Anatomie et Histologie comparée.	HOCART.....	T	Minéralogie et Cristallographie.
GRASSE.....	T	Évolution des Êtres organisés.	J. P. MATHIEU....	T	Physique (Optique).
PRÉVOST.....	T	Chimie organique.	COUTEAUX.....	T	Cytologie.
WYART.....	T	Minéralogie et Cristal.	MAY.....	T	Zoologie (Orsay).
TEISSIER.....	T	Zoologie.	CHOQUET.....	T	Théorie des fonctions et Topologie.
MANGENOT.....	T	Biologie végétale (Orsay).	FELDMANN.....	T	Biologie végétale marine.
AUGER.....	T	Physique quantique et Relativité.	GUINIER.....	T	Physique des Solides (Orsay).
MONNIER.....	T	Physiologie générale.	JOST.....	T	Physiologie comparée.
PIVETEAU.....	T	Paléontologie.	FORTET.....	T	Calcul des Probabilités et Physique mathématique.
ROCARD.....	T	Physique (E. N. S.).	SCHWARTZ.....	T	Calcul différentiel et intégral.
CARTAN.....	T	Mathématiques (E. N. S.).	CHOUARD.....	T	Physiologie végétale.
LAFFITTE.....	T	Chimie générale.	MALAVARD.....	T	Aviation (Technique Aéronaut.).
FAVARD.....	T	Géométrie supérieure.	BRELOT.....	T	Calcul différentiel et intégral.
COULOMB.....	T	Physique du Globe.	NORMANT.....	T	Synthèse organique.
M ^{lle} COUSIN.....	T	Biologie animale (S. P. C. N.).	BERNARD.....	T	Chimie minérale.
CHRÉTIEN.....	T	Chimie minérale.	BUVAT.....	T	Botanique (E. N. S.).
DRACH.....	T	Zoologie.	DUGUÉ.....	T	Statistiques mathématiques.
KASTLER.....	T	Physique (E. N. S.).	SOULAIRAC.....	T	Psychophysiologie.
EPHRESSI.....	T	Génétique.	ULRICH.....	T	Physiologie végétale appliquée.
RIVIÈRE.....	T	Géologie (S. P. C. N.) et Sédimentologie (Orsay).	MARÉCHAL.....	T	Optique théorique et appliquée.
GAUTHERET.....	T	Biologie végétale (P. C. B.).	KIRRMANN.....	T	Théories chimiques.
LUCAS R.....	T	Recherches physiques.	CHADEFAUD.....	T	Botanique.
THOMAS A.....	T	Biologie cellulaire.	M ^{lle} LE BRETON.....	T	Physiologie de la Nutrition.
ARNULF.....	T	Optique appliquée.	LELONG.....	T	Application de l'analyse à la Géométrie.
MORAND.....	T	Physique Enseignement.	DEVILLERS.....	T	Anatomie et Histologie comparée.
SOLEILLET.....	T	Physique (P. C. B.).	EHRESMANN.....	T	Topologie algébrique.
FORTIER.....	T	Mécanique expérimentale des fluides.	FRANÇON.....	T	Physique (S. P. C. N.).
PETTI.....	T	Biologie maritime.	GLANGEAUD.....	T	Géographie physique et Géologie.
QUENEY.....	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.	GODEMENT.....	T	Mathématiques (M. G. P.).
GAILLEN.....	T	Embryologie.	PISOT.....	T	Technique mathématique de la Physique.
EICHORN.....	T	Botanique.	ROCH.....	T	Géologie.
DE CUGNAC.....	T	Biologie végétale (S. P. C. N.).	SCHATZMANN.....	T	Astrophysique.
M ^{lle} CAUCHOIS.....	T	Chimie physique.	TERMIER.....	T	Géologie générale.
THELLIER.....	T	Physique du Globe.	ZAMANSKY.....	T	Mathématiques générales.
L'HÉRITIER.....	T	Biologie générale (Orsay).	LENNUIER.....	T	Physique (M. G. P.).
GRIVET.....	T	Radioélectricité (Orsay).	RIZET.....	T	Génétique (Orsay).
PONCIN.....	T	Mécanique générale.	ROUTHIER.....	T	Géologie appliquée.
DUBREIL.....	T	Arithmétique et Théorie des Nombres.	M ^{me} TONNELAT.....	T	Physique théorique.
QUELET.....	T	Chimie organique.	DIXMIER.....	T	Mathématiques (M. P. C.).
CAGNIARD.....	T	Géophysique appliquée.	SOUCHAY.....	T	Chimie générale.
CHAMPETIER.....	T	Chimie macromoléculaire.	AIGRAIN.....	T	Électrotechnique générale.
CUVILLIER.....	T	Micropaléontologie.	BRUSSET.....	T	Chimie systématique.
JUNG.....	T	Géologie.	M. LÉVY.....	T	Physique théorique des Hautes Énergies (Orsay).
TRILLAT.....	T	Microscopie et diffraction électronique.	M ^{me} CHAIX.....	T	Chimie biologique.
WERMANN.....	T	Chimie organique et structurale.	M ^{me} HUREL-PY....	T	Biologie végétale (P. C. B.).
JACQUINOT.....	T	Spectroscopie et Physique céleste (Orsay).	PIAUX.....	T	Chimie (M. P. C.).
VASSY.....	T	Physique de l'Atmosphère.	BRUN.....	T	Mécanique théorique des fluides.
DESTOUCHES.....	T	Théories physiques.	LEDERER.....	T	Chimie biologique (Orsay).
			M ^{me} DUBREIL.....	T	Mathématiques (Agrégation).
			M ^{me} LELONG.....	T	Mathématiques II (E. N. S.).
			BELLAIR.....	T	Géologie (S. P. C. N.).

- COTTE..... T Physique Électricité.
DUBOIS J. E..... T Chimie organique.
LAMOTTE..... T Zoologie (E. N. S.).
MICHEL A..... T Chimie minérale (Orsay).
OLMER..... T Énergétique générale.
ROUAULT..... T Électricité (Orsay).
GAUTHIER..... T Mécanique appliquée.
BARCHEWITZ..... T Chimie physique.
BROSSEL..... T Physique atomique.
BUSER..... T Physiologie comparée.
CASUS..... T Physiologie végétale (Orsay).
CASTAING..... T Physique II Thermod. (Orsay).
CURIEN..... T Minéralogie et Cristallographie.
MOYSE..... T Physiologie végétale (Orsay).
NOIROT..... T Évolution des Êtres organisés.
PANNETIER..... T Chimie générale.
POSSOMPES..... T Zoologie.
PULLMANN..... T Chimie quantique.
TEILLAC..... T Physique nucléaire et Radio-activité (Orsay).
TONNELAT..... T Biologie physico chimique (Orsay).
VILLE..... T Économétrie.
WILLEMART..... T Chimie (P. C. B.).
DODE..... T Chimie (Orsay).
FREYMANN..... T Recherches physiques.
GUINCHET..... T Biologie végét. S. P. C. N. (Orsay).
ROLLET..... T Chimie minérale.
M^{lle} JOSIEN..... T Chimie (S. P. C. N.).
CHEVALLEY..... T Géométrie algébrique et Théorie des groupes.
ARNOULT..... T Électronique (Orsay).
CHAPELLE..... T Physique I (Orsay).
DELANGE..... T Mathématiques I (Orsay).
DENY..... T Mathématiques générales (Orsay).
GERMAIN..... T Mécanique théorique des fluides.
LUCAS G..... T Géologie.
ALLARD..... T Chimie physique.
BERTHELOT..... T Physique des particules fondamentales (Orsay).
BRICART..... T Météorologie et Physique de l'Atmosphère.
M^{me} ALBE-FESSARD..... T Psychophysiologie.
FRIEDEL..... T Physique des solides (Orsay).
M. JULIA..... T Études des Mol. complexes.
LENDER..... T Biologie animale (S. P. C. N.) (Orsay).
MAGAT..... T Physicochimie des radioéléments.
M^{lle} QUINTIN..... T Electrochimie.
MONOD..... T Chimie du métabolisme.
BENOIT..... T Physiologie animale (Orsay).
DE POSSEL..... T Analyse numérique.
CHARLOT..... T Chimie analytique.
LEMÉE..... T Écologie végétale (Orsay).
GUÉRIN..... T Chimie M. P. C. (Orsay).
CHATELET M..... T Chimie (P. C. B.).
JEAN..... T Physique nucléaire (Orsay).
MATTIER..... T Physique (S. P. C. N.).
BERGERARD..... T Zoologie (Orsay).
BERTEIN..... T Électronique (Orsay).
BOUSSIÈRES..... T Radiochimie.
M^{me} COUTURE..... T Thermodynamique et Mécanique physique.
ELLENBERGER..... T Géologie des grandes régions du Globe.
FRANC..... T Biologie animale (P. C. B.).
SCHNELL..... T Botanique tropicale.
STOLKOWSKI..... T Physiologie végétale.
ACHER..... T Chimie biologique.
BAUDOIN..... T Biologie animale (P. C. B.).
BEAUMONT..... T Biologie animale (S. P. C. N.).
BLAMONT..... T Géophysique-Ionosphère.
BOURREAU..... T Botanique.
CURIE D..... T Physique (M. G. P.).
DURAND-DELGA..... T Géologie.
FRÉON..... T Chimie organique (Orsay).
HELLER..... T Physiologie végétale.
TORTRAT..... T Calcul des Probabilités.
CAILLEUX..... T Géologie (S. P. C. N.).
MAGNAN..... T Physique (S. P. C. N.).
DAUDEL..... T Mécanique ondulatoire appliquée à la Chimie théorique et à la Physique nucléaire.
Biologie végétale (S. P. C. N.).
M^{lle} FOURCROY.....
M^{me} CHOQUET.....
BRUHAT..... T Mécanique analytique et Mécanique céleste.
M^{lle} VEIL..... T Physiologie générale.
LWOFF..... T Microbiologie.
SIESTRUNCK..... T Mécanique physique et expérimentale.
LACOMBE..... T Métallurgie des Métaux nucléaires (Orsay).
BROCHARD..... T Physique P. C. B. (Orsay).
CABANNES..... T Mécanique générale.
LESIEUR..... T Mathématiques I (Orsay).
MAZET..... T Mécanique générale (Orsay).
CAIRE..... T Géographie physique et Géologie dynamique.
COMOLET..... T Mécanique des fluides.
CORABEUR..... T Physiologie animale (Orsay).
DELLOUE..... T Physique de l'exosphère.
GORENFLOT..... T Botanique II (Orsay).
HOUILLON..... T Biologie animale (P. C. B.).
JULLIEN J..... T Chimie S. P. C. N. (Orsay).
MALGRANGE..... T Technique mathématique de la Physique (Orsay).
Anthropologie.
NOZERAN..... T Botanique II (Orsay).
BLANC-LAPIERRE..... T Physique E. N. S. (Orsay).
CHEVAUGEON..... T Botanique (Orsay).
KAHANE..... T Mathématiques (Orsay).
SAMUEL..... T Mathématiques E. N. S. féminines.
KOURGANOFF..... T Astronomie (Orsay).
THIRY..... T Mécanique céleste.
ABELES..... T Physique (S. P. C. N.).
AMAT..... T Physique (P. C. B.).
AUBOIN..... T Géologie.
M^{me} BENOIT.....
GUBUTAL..... T Physique nucléaire et Radio-activité (Orsay).
BOUGIS..... T Biologie marine (Villefranche-sur-Mer).
BRUHAT..... T Mathématiques (M. P. C.).
BRUNN..... T Géologie historique (Orsay).
CHABBAI..... T Physique M. G. P. (Orsay).
DEHEUVELS..... T Mathématique propédeutique.
D'ESPAGNAT..... T Physique théorique (Orsay).
FURON..... T Géologie (S. P. C. N.).
M^{me} GANS..... T Génétique.
GENEVES..... T Biologie végétale (P. C. B.).
GUILBERT..... T Physique (C. U. S. Orléans).
HUPE..... T Pétrographie.
HOLLANDE..... T Biologie générale.
LIONS..... T Analyse numérique.
MAITTE..... T Chimie (P. C. B.).
MEYER..... T Physique propédeutique.
NICOLAS..... T Géologie appliquée.
PANIGEL..... T Biologie générale.
RAVIER..... T Pétrographie.
ROSEAU..... T Mécanique théorique des fluides.
ROUBINE..... T Electronique.
SILBER..... T Chimie (P. C. B.).
UEBERSFELD..... T Electronique.
YVON..... T Théories physiques.
HERVÉ..... T Mathématiques.
NÉRON..... T Mathématiques M. P. C. (Orsay).
M^{me} PECKER.....
WIMEL..... T Astrophysique.
BALKANSKY..... T Physique (M. P. C.).
LE CORRE..... T Électricité.



DELCROIX.....	T	Physique théorique (Orsay).	VICHNIEWSKY.....	T	Mécanique industrielle.
GOURDIN.....		Physique théorique des Hautes-Énergies (Orsay).	BLAQUIÈRE.....		Électronique (Orsay).
LEHMANN.....	T	Physique expér. des Hautes-Énergies (Orsay).	ARNOUS.....	T	Physique théorique.
NATAF.....	T	Physique nucléaire et Radio-activité (Orsay).	TATIBOUET.....	T	Chimie (C. S. U. Orléans).
ÉCHALIER.....		Biologie animale (P. C. B.).	MALLAVIN.....	T	Mathématique propéd. (Orsay).
BARRAUD.....		Physiologie cellulaire.	GAUDEMAR.....		Chimie propédeutique.
LIORÉ.....		Physiologie végétale (Orsay).	PÉREZ Y JORBA....		Physique expér. des Hautes-Énergies (Orsay).
DARS.....		Géologie struct. et Géologie appl.	DAVID.....	T	Chimie (Agrégation) (Orsay).
CAMEFORT.....	T	Botanique (Agrégation).	BROUSSE.....	T	Mécanique théorique.
			RÖSCH.....	T	Astronomie.

Secrétaire général.... R. POULLAIN



RECHERCHES SUR LA DÉTERMINATION ET L'UTILISATION DES ÉLÉMENTS OSCULATEURS DANS LA MÉCANIQUE DES SATELLITES PROCHES

Par M. F. BARLIER,

(Observatoire de Paris.)

SOMMAIRE. — Détermination des éléments osculateurs d'un satellite artificiel sur des arcs de trajectoire très courts, d'une dizaine de degrés géocentriques. Le demi-grand axe est supposé connu. Précision des éléments obtenus. Étude du même problème sur une révolution en vue de déterminer également le demi-grand axe. Étude d'un exemple numérique (*Écho I*). Exemples d'application des éléments osculateurs : détermination des termes à courte période (aplatissement terrestre), détermination des harmoniques zonaux, détermination des densités.

ABSTRACT. — Determination of osculating elements of an artificial satellite using short geocentric arcs of the orbit, of a length of about ten degrees. The value of the semi-major axis is being assumed. Precision of the determined elements. The same problem using a whole revolution is solved in order to determine also the semi-major axis. A numerical example is given (*Echo I*). Examples of applications of osculating elements for the determination of short period terms (due for instance to the Earth flattening), zonal harmonics and densities are given.

ZUSAMMENFASSUNG. — Bestimmung des Elemente einer oskulierenden Bahn eines künstlichen Erdsatelliten aus sehr kurzen, etwa zehn Grad langen geozentrischen Bahnbogen. Es wird angenommen, dass die Grosse Halbachse bekannt ist. Genauigkeit der erhaltenen Elemente. Bearbeitung desselben Problems auf einem Umlauf mit dem zusätzlichen Ziel auch die Grosse Halbachse zu berechnen. Bearbeitung eines numerischen Beispiels (*Echo I*). Beispiele für die Benutzung des oskulierenden Elemente : Bestimmung der kurzperiodischen Glieder, (Erdabplattung), Bestimmung der zonalen harmonischen Glieder, Bestimmung der Dichten.

Резюме. — Метод определения оскулирующих элементов искусственного спутника при помощи коротких геоцентрических дуг, длиною около десяти градусов, и полагая, что большая полуось известна. Точность полученных элементов. Автор изучает ту-же задачу поль-

зуюсь полным оборотом спутника для определения большой полуоси. Дается численный пример (Эхо I). Автор дает примеры применения оскулирующих элементов для определения короткопериодических членов (вызванных примерно сжатием Земли), зональных коэффициентов разложения силовой функции и плотности атмосферы.

INTRODUCTION.

Depuis le lancement du premier Spoutnik en 1957, l'étude des trajectoires des satellites artificiels proches de la Terre a permis d'accomplir de grands progrès dans le domaine de la géodésie et de la connaissance de la haute atmosphère : détermination des premiers termes du potentiel terrestre, détermination des paramètres atmosphériques (pression, densité, température). Les articles de Kaula [1], Jacchia [2], Priester [3] résument les principaux résultats obtenus dans ce domaine.

Ces études se font à partir des variations des éléments orbitaux en fonction du temps, éléments qui définissent la trajectoire et la position du satellite à tout instant dans l'espace. Il existe en effet des relations théoriques qui lient ces variations aux termes du développement du potentiel terrestre, aux paramètres atmosphériques et aux autres paramètres définissant les positions des stations d'observation. Ces relations peuvent se linéariser et alors la résolution du problème devient évidente. Il faut déterminer à différentes époques les éléments orbitaux de trajectoires de caractéristiques très variées de façon à obtenir un nombre d'équations correspondant aux nombres d'inconnues.

Il est préférable d'utiliser un nombre surabondant d'équations et de résoudre le système par la méthode des moindres carrés.

Pour déterminer les éléments orbitaux, on dispose d'observations faites en différents points de la Terre et utilisant, soit des méthodes optiques, soit des méthodes radioélectriques. Elles consistent à mesurer localement une direction angulaire, une distance, ou une variation de vitesse. Les observations portent souvent sur un très petit arc de trajectoire topocentrique, dont on ne peut tirer isolément que peu de renseignements, si ce n'est la position du satellite sur sa trajectoire supposée connue. Devant la complexité du problème, le nombre d'inconnues, le type d'observations disponibles, et la précision requise, on se trouve tout naturellement porté à déterminer les paramètres orbitaux sur plusieurs révolutions, 10, 20 et même plus (Veis [4], Merson [5], Schocholina [6]). Les termes séculaires sont développés sous forme de polynômes de degré 1, 2 ou 3, les termes à longue période sous forme de séries de Fourier limitées aux premiers termes. La détermination de la trajectoire se ramène

au calcul des éléments orbitaux classiques à un instant donné et des coefficients empiriques des développements en séries.

Cette façon de procéder a l'avantage de déterminer les éléments orbitaux même si les observations sont très espacées dans le temps. Elle est simple, rapide et s'applique dans de nombreux cas pratiques. Mais des critiques sont à faire : le nombre de termes adoptés dans les développements en série est assez arbitraire et la comparaison des éléments observés avec ceux de la théorie est délicate (Cook [7], Kovalevsky [8]). Le résultat obtenu est une moyenne des différents effets des perturbations survenues au cours des révolutions successives.

On peut donc chercher s'il ne serait pas intéressant de déterminer les éléments orbitaux sur des arcs de trajectoire beaucoup plus courts en utilisant un matériel d'observation approprié. En effet, plus l'arc de trajectoire devient petit, plus il tend à se confondre avec une ellipse képlérienne; par conséquent, à la limite, la forme des développements des éléments orbitaux en fonction du temps est parfaitement connue et ne nécessite plus d'hypothèses plus ou moins justifiées.

D'autre part, les éléments osculateurs ainsi déterminés ont l'avantage de permettre des études fines de la trajectoire. La comparaison des éléments osculateurs en différents points de la trajectoire de l'orbite doit permettre de mettre en évidence des anomalies locales du champ de gravitation. Ceci n'est pas possible avec les autres méthodes tributaires des formes des développements donnés *a priori* aux éléments orbitaux en fonction du temps. J. Kovalevsky a souligné dès 1961 [9], l'intérêt de la détermination des éléments osculateurs.

Or nous disposons d'une technique d'observation mise au point par P. Muller à l'Observatoire de Meudon dans le domaine visuel [10], puis dans le domaine photographique ([11], [12]). L'observateur s'impose de suivre le satellite sur des arcs de trajectoire topocentriques aussi longs que possible à partir d'une seule station.

L'existence de cette technique d'observation appliquée de façon très systématique, jointe aux idées développées par J. Kovalevsky nous ont incité à entreprendre ce présent travail : la détermination et l'utilisation des éléments osculateurs des satellites artificiels proches de la Terre.

Dans une première partie se trouve exposée la méthode qui a servi à la détermination des éléments osculateurs. Les méthodes classiques sont utilisables avec quelques modifications : nous avons adopté celle de Laplace. Il apparaît que, sur un petit arc de trajectoire, il n'est pas possible de déterminer les six éléments orbitaux avec une précision suffisante; il est indispensable de supposer connu le demi-grand axe. Celui-ci est, en effet, lié par la troisième loi de Kepler à la période, et cette dernière n'est bien connue que lorsque le satellite a accompli une révolution entière. Nous donnons la manière de procéder pour tenir compte de ce fait en supposant connu le demi-grand axe. Dans une deuxième

partie, nous étudions les erreurs probables des éléments osculateurs ainsi déterminés compte tenu de la précision des observations. Nous recherchons en particulier si les hypothèses servant au calcul d'erreurs sont légitimes. Il faut ainsi que les erreurs d'observation obéissent à la Loi Normale. D'autre part, nous cherchons les sources possibles d'erreurs systématiques et nous tentons de chiffrer l'ordre de grandeur des erreurs auxquelles on pourrait s'attendre. Un exemple numérique à l'appui vérifie que la détermination précise des éléments osculateurs est possible.

Dans la troisième partie nous développons des exemples d'application des éléments osculateurs. Il faut distinguer les différentes périodes des variations des éléments osculateurs, qui conduisent à des études de nature différente : étude des variations à courte et à longue période et étude des variations séculaires. Nous montrons d'abord qu'il est possible de constater des variations à courte période, en particulier celles dues à l'aplatissement terrestre. Les applications pour le calcul des anomalies locales du potentiel en découlent. Nous indiquons ensuite comment il est possible de calculer les termes du développement du potentiel terrestre à partir des variations des termes séculaires et à longue période. La comparaison des observations et de la théorie est étudiée avec soin. Nous calculons alors les deux premiers termes du potentiel terrestre J_2 et J_3 en supposant connues les valeurs au moins approchées des suivants, contrôlant ainsi la validité de la méthode. La valeur de la densité atmosphérique apparaît automatiquement comme sous-produit du calcul.

NOTATIONS.

Définissons ici des notations que nous conserverons dans ce travail :

- a , Demi-grand axe;
- e , Excentricité;
- i , Inclinaison de l'orbite par rapport à l'équateur de référence;
- Ω , Ascension droite du nœud ascendant par rapport à l'équinoxe de référence;
- ω , Argument de latitude du périée;
- M , Anomalie moyenne.

Ces notations désignent, sauf indication spéciale, des éléments osculateurs. Les éléments accentués : a' , e' , ... représentent les éléments corrigés des termes à courte période dus à l'aplatissement terrestre. Les éléments accentués deux fois : a'' , e'' , ... représentent les éléments moyens corrigés des termes à longue et à courte période.

α , Ascension droite topocentrique des satellites dans le système de référence;

δ , Déclinaison topocentrique du satellite dans ce même système;

α' , α'' , δ' , δ'' représentent leurs dérivées première et seconde par rapport au temps;

x , y , z , Coordonnées cartésiennes géocentriques du satellite dans le système de référence;

x' , y' , z' , Composantes du vecteur vitesse du satellite.

Les quantités α_0 , α'_0 , α''_0 , δ_0 , δ'_0 , δ''_0 , x_0 , y_0 , z_0 , x'_0 , y'_0 , z'_0 désignent les valeurs de α , $\dots$, z' à une époque T_0 .

J_i , Harmoniques zonaux du potentiel terrestre;

R , Rayon équatorial terrestre;

GM , Constante géocentrique de la gravitation.

CHAPITRE I.

LA DÉTERMINATION DES ÉLÉMENTS OSCULATEURS.

Nous supposons que le satellite est repéré par ses coordonnées cartésiennes et qu'on connaît sa vitesse. Par le formulaire classique du mouvement képlérien, nous pouvons calculer les six éléments correspondants d'une ellipse. Ces éléments sont, par définition, les éléments osculateurs à la trajectoire. Ils varient d'un instant à un autre et au bout de quelques minutes ne peuvent plus représenter correctement le mouvement du satellite. Le problème que nous étudions est celui de la détermination de ces éléments à un instant donné, la loi de leur variation en fonction du temps et des valeurs initiales étant supposée connue. D'autre part, nous nous imposons de n'utiliser que des observations réparties sur un arc de trajectoire relativement court ne dépassant pas en principe une vingtaine de degrés et faites à partir d'une seule station.

Nous avons publié une méthode concernant la détermination des éléments orbitaux [16]. Nous nous abstiendrons de la décrire à nouveau; mais il nous a paru fondamental d'étudier plus que nous ne l'avons fait alors, certains détails de calcul. Sans ce souci de précision, toute discussion de la valeur des éléments orbitaux ne saurait être féconde. On trouvera donc dans cette première partie, quelques commentaires inspirés par ce travail.

1. Généralités. — Nous précisons d'abord certains points du calcul par ailleurs souvent très classique. L'échelle de temps adoptée est le T. U. 2. Sauf indication spéciale, le système d'axes choisi est un système de coordonnées célestes équatoriales rapporté à l'équinoxe moyen 1962,5.

L'origine est au centre de gravité de la Terre. C'est une excellente approximation d'un système d'axes de directions absolues. Les visées angulaires observées sont rapportées directement à un système de ce type. Si les équinoxes ne sont pas identiques, il suffit d'apporter les corrections de précession pour passer d'un système à un autre. Par contre, les positions de l'observateur sont naturellement rapportées à un repère terrestre. Les calculs nécessaires pour passer de ce système d'axes à celui adopté sont connus (Veis [13]).

Ensuite, nous donnons la manière de comparer les positions observées avec les positions calculées à partir des équations théoriques. Ces points précisés, nous rappelons le principe de la détermination des éléments osculateurs.

Calcul des positions de l'observateur. — Ce problème est très délicat si l'on veut une précision meilleure qu'une dizaine de mètres. Les difficultés ont été bien exposées en détail par G. Veis [13] : positions du centre de gravité de la Terre non rattachées à l'origine d'un système géodésique, systèmes géodésiques non rattachés entre eux de façon tout à fait satisfaisante, déplacement de l'axe instantané de rotation sur la croûte terrestre, variation de la rotation de la Terre non uniforme, etc.

Nous avons adopté une solution simplifiée du problème, ne connaissant avec précision que les coordonnées astronomiques de la station. Nous sommes conscients des erreurs systématiques ainsi introduites; mais comme les observations utilisées ne sont faites qu'à partir d'une seule station, cela n'introduit pas d'erreur dans l'étude des variations relatives des éléments orbitaux. D'autre part, il n'a pas été tenu compte des mouvements de l'axe instantané de rotation sur la croûte terrestre. Nous avons écrit pour les coordonnées cartésiennes de l'observateur :

$$\begin{aligned} X &= \rho \cos \varphi' \cos \theta, \\ Y &= \rho \cos \varphi' \sin \theta, \\ Z &= \rho \sin \varphi', \end{aligned}$$

où θ est le temps sidéral vrai local, OZ est l'axe instantané de rotation de la Terre; OX passe par le point γ vrai; φ' est la latitude géocentrique de la station déduite de la latitude astronomique; ρ est le rayon vecteur; l'ellipsoïde adopté est celui de Hayford dont le demi-grand axe est de 6 378, 388 km; la valeur proposée aujourd'hui est 6 378, 160 km [29]. Par cohérence avec l'ancienne valeur, la constante de gravitation terrestre est prise égale à $3,98613 \cdot 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2$.

Le temps sidéral est calculé en tenant compte de ses termes à courte et à longue période et des irrégularités saisonnières de la rotation de la Terre.

Les positions de l'observateur ainsi calculées sont données dans un système de coordonnées équatoriales rapportées à l'équinoxe vrai; nous

faisons ensuite les rotations d'axes correspondant aux corrections de nutation et de précession pour les rapporter à l'équinoxe moyen choisi (A. Danjon [14, chap. IV, V]).

Comparaison des positions observées et des positions géométriques. — Dans la présente étude, nous avons exclusivement utilisé des positions photographiques. Le satellite est repéré par rapport à des champs d'étoiles. Lorsqu'il coïncide parfaitement avec l'une d'elles, ses coordonnées équatoriales sont celles de l'étoile, données par le catalogue fondamental; mais la direction apparente d'un objet observé dépend non seulement de sa position dans l'espace défini par le champ d'étoiles, mais encore de sa vitesse relative par rapport à l'observateur (aberration); elle dépend aussi des écarts de réfraction des rayons lumineux issus respectivement de l'étoile à l'infini et du satellite situé à distance finie (réfraction parallactique); enfin elle dépend de la phase du satellite par rapport au Soleil. Dans le cas de petits satellites cet effet est négligeable, mais pour les gros satellites, les calculs de A. Schmitt [26] montrent que des excentrements de 2 ou 3" sont possibles pour *Écho I* ou *Écho II*.

Reprenons plus en détail les deux premiers points :

1° *Correction d'aberration.* — Dans un système d'axes, nous pouvons toujours considérer la vitesse relative de l'observateur par rapport au mobile observé comme la différence entre deux vitesses : vitesse de l'observateur V , vitesse du mobile V' .

Dans le cas d'une planète du système solaire (ou d'une étoile) la vitesse V est la somme vectorielle de deux vitesses : vitesse de translation de la Terre, vitesse de rotation de la Terre sur elle-même. Cela correspond aux corrections d'aberration annuelle (A) et d'aberration diurne (D).

Dans le cas d'un satellite artificiel où le système d'axes a son origine au centre de gravité de la Terre et non plus au centre du Soleil, V est seulement la vitesse de rotation de la Terre sur elle-même (D).

La correction due à V' s'appelle la correction d'aberration planétaire (P). On a pour une étoile sans mouvement propre ni parallaxe en coïncidence photographiquement avec le satellite :

$$\begin{aligned}\alpha_a^* &= \alpha_v^* + A + D + R, \\ \hat{\alpha}_a &= \hat{\alpha}_v + P + D + R + R_1, \\ A &= -A'/\cos \delta\end{aligned}$$

α_a^* , $\hat{\alpha}_a$ sont les coordonnées équatoriales apparentes de l'étoile et du satellite, α_v^* , $\hat{\alpha}_v$ les coordonnées vraies, R est la réfraction atmosphérique, R_1 la réfraction parallactique.

D'autre part, on a $A' = k(\sin \alpha \sin \odot + \cos \varepsilon \cos \alpha \cos \odot)$; ε est l'obliquité de l'écliptique, $\odot$ la longitude céleste du Soleil, k la constante de l'aberration. A comprend seulement la partie variable de l'expression entière de l'aberration annuelle. L'autre partie dépendant de l'excentricité

de l'orbite terrestre est pratiquement constante [14, n° 79], d'où puisque

$$\begin{aligned}\alpha_a^* &= \hat{\alpha}_a, \\ \alpha_v^* + \Lambda &= \hat{\alpha}_v + P + R_1.\end{aligned}$$

Dans les calculs d'orbite, on comparera les deux membres de l'égalité ci-dessus. A partir des éléments osculateurs, on calcule la position géométrique du satellite. On la corrige de l'aberration planétaire, éventuellement de la réfraction parallactique; cette quantité est comparable à la position observée issue de la réduction photographique (α_v^*) et corrigée de l'aberration annuelle Λ [15, chap. VI, VII]; P comme R_1 ne sont connus qu'après une première approximation du calcul de la trajectoire du satellite puisqu'ils font intervenir la distance de l'observateur au satellite.

2. *Correction de réfraction parallactique.* — Si le satellite était à l'infini, la réfraction R subie par le rayon lumineux issu du satellite serait identique à celle de l'étoile, la direction géométrique serait OA parallèle à $O'S$ (fig 1).

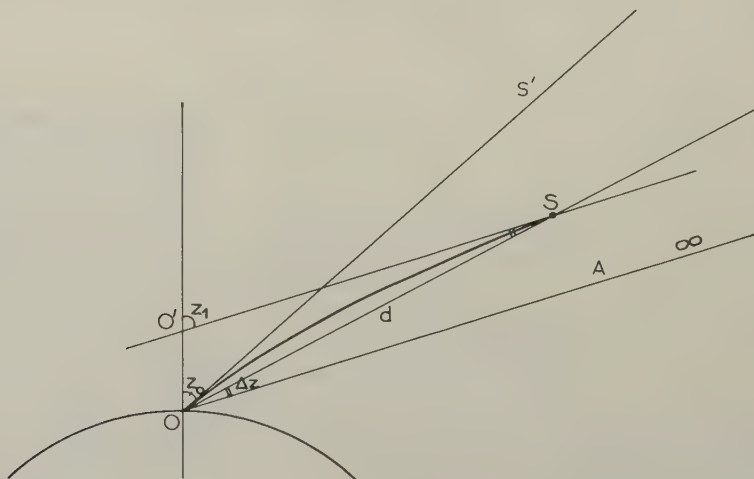


Fig. 1.

Nous supposons le satellite hors de l'atmosphère, la vitesse de la lumière est celle de sa propagation dans le vide; la direction du rayon lumineux est OS' . En réalité la direction géométrique de S est OS . On peut donc considérer le satellite affecté par la réfraction comme s'il était à l'infini, à condition de placer l'observateur non en O mais en O' . D'après A. Danjon [14, n° 79]

$$\begin{aligned}OO' &= 2,34(1 + \tan^2 Z_0), \\ \Delta Z &= \frac{OO' \sin Z_0}{d};\end{aligned}$$

Z_0 , Distance zénithale;

d , Distance observateur-satellite en mètres comme OO' . ΔZ est la correction de distance zénithale.

Pour une distance observateur-satellite de 1000 km et dans les conditions normales (0°, 76 cm de mercure, longueur d'onde 0,570 μ), nous avons dressé le tableau suivant valable pour notre étude numérique :

TABLEAU I.

Z_0 (°).	OO' (m).	ΔZ (secondes de degré).
0.....	2,3	0,31
30.....	3,1	0,54
40.....	4,0	0,92
60.....	5,7	1,69
70.....	9,4	3,78
75.....	20,0	6,96
80.....	71,0	14,81

La plupart des clichés ont été pris à une même distance zénithale (40°). Il est légitime de ne pas tenir compte de cette correction dans ce cas.

Puisque la précision des observations n'est pas meilleure que la seconde de degré, il n'y a pas lieu non plus de tenir compte de la longueur d'onde exacte du rayon lumineux dans ce qui suit. Une étude pour des orbites de caractéristiques variées a été publiée par Groves et J. Davies [28].

2. Méthode de calcul des éléments osculateurs. — La méthode utilisée est une variante de la méthode de Laplace. Elle comprend deux étapes. Nous en rappelons l'essentiel, en y ajoutant des remarques nécessaires.

Première étape. — Nous déterminons la position et la vitesse du satellite ($x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0$) à un instant T_0 en résolvant le système I écrit ci-dessous. Ce système est obtenu en écrivant la relation classique de la dynamique dans un système d'axes absolus dont l'origine est au centre de la Terre. On suppose ici la Terre parfaitement sphérique, homogène et isolée dans l'espace. L'axe OZ est dirigé vers l'axe instantané de rotation de la Terre, l'axe OX vers le point γ vrai, O est le centre de gravité de la Terre. L'axe OY est tel que le trièdre OX, OY, OZ soit direct.

$$\text{Système I. } \begin{cases} \frac{d^2(x-X)}{dt^2} = -\frac{GM \cdot x}{r^3} + \omega^2 \cdot X; \\ \frac{d^2(y-Y)}{dt^2} = -\frac{GM \cdot y}{r^3} + \omega^2 \cdot Y; \\ \frac{d^2(z-Z)}{dt^2} = -\frac{GM \cdot z}{r^3}; \end{cases}$$

x, y, z , Coordonnées du Satellite;

X, Y, Z , Coordonnées de l'Observateur;

r , Distance centre Terre-Satellite;

ω , Vitesse angulaire de la rotation de la Terre.

En introduisant les quantités

$$(1) \quad \begin{cases} \lambda = \cos \delta \cos \alpha, \\ \mu = \cos \delta \sin \alpha, \\ \nu = \sin \delta, \\ \Delta = \text{distance Observateur-Satellite,} \end{cases}$$

on peut écrire

$$(2) \quad \begin{cases} x - X = \Delta \lambda, \\ y - Y = \Delta \mu, \\ z - Z = \Delta \nu. \end{cases}$$

Le système I se transforme alors en système II :

$$\text{Système II.} \quad \begin{cases} \lambda'' \Delta + 2 \lambda' \Delta' + \lambda \Delta'' = -\frac{GM \lambda \Delta}{r^3} - X \left(\frac{GM}{r^3} - \omega^2 \right); \\ \mu'' \Delta + 2 \mu' \Delta' + \mu \Delta'' = -\frac{GM \mu \Delta}{r^3} - Y \left(\frac{GM}{r^3} - \omega^2 \right); \\ \nu'' \Delta + 2 \nu' \Delta' + \nu \Delta'' = -\frac{GM \nu \Delta}{r^3} - \frac{Z \cdot GM}{r^3}, \end{cases}$$

où λ' , λ'' , μ' , μ'' , ν' , ν'' sont les dérivées premières et secondes de λ , μ , ν par rapport au temps.

Du système II on déduit aisément un système III de la forme :

$$\text{Système III.} \quad \begin{cases} \Delta = f(\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu', \lambda'', \mu'', \nu'', r); \\ \Delta' = g(\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu', \lambda'', \mu'', \nu'', r); \\ r^2 = R^2 + \Delta^2 - 2 \cdot \Delta (\lambda X + \mu Y + \nu Z). \end{cases}$$

Or les quantités λ , μ , ν , λ' , μ' , ν' , λ'' , μ'' , ν'' se déduisent directement des visées angulaires du Satellite en coordonnées équatoriales [relation (1)]. Le système III peut alors se résoudre par un processus itératif donnant les valeurs de Δ , Δ' , r , c'est-à-dire encore de x , y , z , x' , y' , z' . Il suffit de connaître une valeur grossièrement approchée de r . Finalement dans la méthode de Laplace [14, n° 100] la résolution du système I est ramenée à calculer à l'instant donné les quantités α_0 , α'_0 , α''_0 , δ_0 , δ'_0 , δ''_0 qui sont les coordonnées équatoriales topocentriques du Satellite et leurs dérivées premières et secondes par rapport au temps.

Pour les calculer on cherche à représenter au mieux les coordonnées équatoriales topocentriques par des polynomes de degré supérieur ou au plus égal à 2. Les premiers coefficients du polynome donnent les quantités cherchées. La méthode utilisée est celle des moindres carrés. L'instant T_0 est l'instant moyen des observations. Cette règle dont l'importance a été mise en évidence par H. Poincaré, doit être strictement observée si l'on

se limite à un polynome de degré 2, par manque d'observations par exemple. L'influence des termes négligés est alors minimale (A. Danjon [14, n° 100] et Moulton [30, n° 116]).

Les coordonnées équatoriales sont rapportées au même système d'axes que les coordonnées rectangulaires.

L'arc géocentrique sur lequel s'étendent les observations utilisées a été en pratique compris entre 5 et 10 degrés. On commence un premier calcul avec un polynome de degré 2, puis on continue avec un polynome de degré de plus en plus élevé. Dès que l'écart quadratique moyen devient inférieur à une valeur fixée en fonction de la précision des mesures, on adopte les valeurs trouvées comme solution. Au-delà l'écart quadratique moyen diminue très lentement avec le degré du polynome. Nous donnons un exemple numérique correspondant à un passage d'*Écho I* à Meudon le 10 juillet 1962 d'un angle de 5° géocentriques. Une trentaine de pointés du Satellite a pu être faite en coordonnées équatoriales α et δ . Dans les tableaux II et III nous donnons seulement la valeur des huit premiers résidus en α et en δ par rapport à la loi polynomiale. Mais nous donnons la valeur de l'écart quadratique moyen de toutes les observations.

TABLEAU II.

Degré du polynome.	(O—C) $_{\alpha_1}$ (10 ⁻⁵ rad).	(O—C) $_{\alpha_2}$ (10 ⁻⁵ rad).	(O—C) $_{\alpha_3}$ (10 ⁻⁵ rad).	(O—C) $_{\alpha_4}$ (10 ⁻⁵ rad).	(O—C) $_{\alpha_5}$ (10 ⁻⁵ rad).	(O—C) $_{\alpha_6}$ (10 ⁻⁵ rad).	(O—C) $_{\alpha_7}$ (10 ⁻⁵ rad).	(O—C) $_{\alpha_8}$ (10 ⁻⁵ rad).	σ_{α} (10 ⁻⁵ rad).
2...	-22,8	-9,6	-3,2	+3,4	+7,1	+12,5	+10,7	+16,3	11,40
3...	-4,4	+0,3	+1,9	+0	+0,2	+3,5	+0,9	+4,6	2,91
4...	-0,2	+1,3	+1,4	+2,5	+2,6	+0,7	+2,6	+3,7	1,67
5...	-1,3	+1,4	+2,0	+1,6	+2,0	+1,2	+2,9	+3,2	1,56
6...	-1,5	+1,5	+2,2	+1,5	+1,9	+1,1	+3,0	+3,1	1,51
7...	-0,6	+0,7	+1,2	+1,5	+1,4	+1,9	+2,5	+3,2	1,41
8...	-0	-0,1	+0,7	+1,1	+0,8	+2,4	+2,8	+2,7	1,16

TABLEAU III.

Degré du polynome.	(O—C) $_{\delta_1}$ (10 ⁻⁵ rad).	(O—C) $_{\delta_2}$ (10 ⁻⁵ rad).	(O—C) $_{\delta_3}$ (10 ⁻⁵ rad).	(O—C) $_{\delta_4}$ (10 ⁻⁵ rad).	(O—C) $_{\delta_5}$ (10 ⁻⁵ rad).	(O—C) $_{\delta_6}$ (10 ⁻⁵ rad).	(O—C) $_{\delta_7}$ (10 ⁻⁵ rad).	(O—C) $_{\delta_8}$ (10 ⁻⁵ rad).	σ_{δ} (10 ⁻⁵ rad).
2...	+31,4	+19,5	+13	-5,2	-8,5	-15,1	-24,2	-22,1	22,78
3...	-6,3	-0,8	+2,4	+1,7	+5,5	+3,3	-0,2	+2,0	3,50
4...	-1,3	+0,4	+1,8	-1,3	+2,0	-0,1	-2,2	+0,9	1,89
5...	-0,8	+0,3	+1,5	-1,6	+1,8	-0,3	-2,1	+1,1	1,87
6...	-0,6	+0,2	+1,3	-1,8	+1,7	-0,2	-1,9	+1,2	1,85
7...	+0,2	-0,5	+0,5	-1,8	+2,2	+0,4	-1,5	+1,3	1,73
8...	+0,2	-0,5	+0,5	-1,8	+2,2	+0,4	-1,5	+1,3	1,73

Nous publions également dans le tableau IV la valeur des éléments orbitaux qu'on peut en déduire, d'après les équations de Laplace. On remarquera d'abord l'instabilité des éléments a , e , ω , M . Elle résulte

de la petitesse de l'arc sur lequel on a calculé les éléments orbitaux (angle géocentrique, 5°). La quantité la mieux déterminée est la position du plan de l'orbite définie par les éléments Ω et i et la position du satellite sur sa trajectoire définie par $\omega + M$; on notera que les valeurs obtenues Ω , i , $\omega + M$, avec le polynôme de degré 4 sont parmi celles qui s'approchent relativement le plus de la solution définitive donnée également dans le tableau IV. Cette solution a été déduite de l'ensemble de toutes les observations. Cela justifie ainsi le fait de s'arrêter ici à un polynôme de degré 4. Certes les solutions obtenues avec un polynôme de degré 3, 5 ou 6 seraient aussi acceptables comme première approximation, mais elles sont un peu moins bonnes que la précédente. D'autre part, les solutions obtenues avec un polynôme de degré 7 ou 8 comme celles obtenues avec un polynôme de degré 2 paraissent dans l'ensemble encore moins satisfaisantes. D'une façon générale, le calcul des coefficients d'ordre élevé, qui physiquement ne peuvent être déterminés sur des intervalles de temps aussi courts, à supposer qu'ils ne soient pas nuls, fausse le calcul des premiers coefficients, c'est-à-dire ici de α'_0 , α''_0 , δ'_0 , δ''_0 . Le degré optimal du polynôme dépend de l'intervalle de temps sur lequel on fait l'interpolation; il dépend aussi de la position du plan de l'orbite par rapport à l'observateur et des paramètres orbitaux.

TABLEAU IV.

Degré du polynôme.	a (km).	e (rad).	i (rad).	Ω (rad).	ω (rad).	M (rad).	$\omega + M$ (rad).
Valeur définitive.	7 880	0,041	0,8247	3,410	5,55	1,81	7,366
2.....	5 797	0,328	0,8326	3,399	4,41	2,98	7,388
3.....	7 068	0,123	0,8270	3,407	4,62	2,73	7,360
4.....	8 029	0,035	0,8247	3,411	6,01	1,36	7,366
5.....	8 468	0,064	0,8234	3,411	0,53	0,55	7,361
6.....	8 005	0,036	0,8248	3,411	5,92	1,44	7,364
7.....	7 667	0,054	0,8252	3,409	5,09	2,27	7,360
8.....	7 043	0,124	0,8281	3,409	4,56	2,81	7,373

Après avoir calculé les dérivées premières et secondes des coordonnées équatoriales, on revient au système de base de la méthode de Laplace qu'on résoud par itérations successives, A. Danjon [14, n° 101], Moulton [30, nos 118, 119], F. Barlier [17]. La convergence n'est assurée que si les dérivées sont suffisamment proches de la solution. Il importe en cours de calcul d'éliminer les observations aberrantes et les erreurs matérielles d'après les résidus calculés. L'unicité de la solution n'est pas toujours garantie s'il y a seulement trois observations (Moulton [30, nos 120, 121]). On obtient ainsi une solution dans laquelle les deux coordonnées équatoriales sont représentées chacune isolément avec une moyenne de résidus nulle, ce qui est un avantage; ce n'est pas obligatoi-

rement le cas dans les autres méthodes qui utilisent simultanément les deux coordonnées comme inconnues dans le système d'équations.

En résumé, cette méthode est applicable aux observations faites sur des petits arcs. Les perturbations ont été négligées, mais la solution est tout à fait convenable pour servir de première approximation. Dans l'exemple numérique choisi, les solutions obtenues avec un polynôme de degré 3 ou 5 conviendraient aussi pour servir de première valeur d'itération. Si l'on dispose d'une autre solution obtenue à partir d'une éphéméride, cette étape pourra être évitée; cependant nous avons insisté sur son développement, car cette technique de calculs débouche aussi sur d'autres applications qui se dégageront dans la suite du travail.

Deuxième étape. — Le système d'axes utilisé est celui qui a été défini dans le premier paragraphe. Nous déterminons les corrections différentielles à apporter à la position et à la vitesse trouvées précédemment pour représenter de la meilleure façon les observations. Pour cela considérons les coordonnées équatoriales topocentriques observées aux instants t_i , α_i , δ_i et les corrections à apporter à x_0 , y_0 , z_0 , x'_0 , y'_0 , z'_0 , pour obtenir la position et la vitesse du satellite qui permettent une bonne représentation des observations. Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\alpha_i &= f(x + Cx, y + Cy, z + Cz, x' + Cx', y' + Cy', z' + Cz', t_i), \\ \delta_i &= g(x + Cx, y + Cy, z + Cz, x' + Cx', y' + Cy', z' + Cz', t_i), \\ \alpha_{Ci} &= f(x, y, z, x', y', z', t_i), \\ \delta_{Ci} &= g(x, y, z, x', y', z', t_i);\end{aligned}$$

f et g sont définies par l'algorithme qui permet de calculer l'éphéméride d'un Satellite dans le champ de gravitation terrestre lorsqu'on connaît la position et la vitesse du Satellite à un instant donné (théorie de Brouwer).

Si les x_0 , y_0 , z_0 , x'_0 , y'_0 , z'_0 sont suffisamment proches de la solution, on peut écrire

$$\begin{aligned}\alpha_i - \alpha_{Ci} &= \frac{\partial f}{\partial x} Cx + \dots + \frac{\partial f}{\partial z'} Cz', \\ \delta_i - \delta_{Ci} &= \frac{\partial g}{\partial x} Cx + \dots + \frac{\partial g}{\partial z'} Cz' .\end{aligned}$$

On est ainsi ramené à résoudre un système d'équations linéaires surabondant par la méthode des moindres carrés. Il suffit de calculer les $\frac{\partial f}{\partial x}$, soit par une méthode numérique, soit par un algorithme algébrique. Si la condition de linéarité n'est pas satisfaite, la solution obtenue n'est pas encore correcte, mais en règle général elle s'est rapprochée de la solution définitive et en itérant plusieurs fois le processus, on obtient des valeurs de la position et de la vitesse du satellite donnant une très bonne représentation des observations.

Signalons maintenant que la même méthode peut servir à déterminer non plus $x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0$, mais directement les six éléments orbitaux classiques ou certains parmi eux. L'avantage de déterminer la position et la vitesse du corps céleste est d'éviter au niveau de la résolution des équations des difficultés introduites par une excentricité ou une inclinaison petite. Les quantités (x, y, z, x', y', z') sont déterminées avec la même précision relative quel que soit e ou i . Si l'on veut déterminer les éléments orbitaux classiques, il faut faire un changement de paramètre et remplacer ainsi ω et e par $e \cos \omega$ et $e \sin \omega$ [19, n° 33]. En outre, les paramètres sont directement utilisables dans une intégration numérique sur les coordonnées cartésiennes. Cependant si e ou i sont très petits, certaines difficultés se présentent inévitablement. Il est indispensable de prendre des précautions dans le passage des (x, y, z, x', y', z') aux éléments orbitaux, comme l'ont indiqué Brouwer et Clemence [15, n° 28]; certaines séquences de calcul ne peuvent être les mêmes si e ou i sont nulles (J. Kovalevsky [19, n° 68]). Dans l'étude numérique aucune de ces difficultés ne s'est présentée.

Par contre, il est plus aisé de revenir aux éléments orbitaux pour ne déterminer que certains d'entre eux, ou au contraire pour déterminer des constantes supplémentaires comme les variations séculaires des paramètres angulaires. Le nombre d'inconnues augmente ou diminue, mais la technique et les séquences de calcul ne sont pas à modifier. Nous procédons ainsi comme dans beaucoup de programmes d'éphémérides (Veis et C. H. Moore [4], par exemple).

Le calcul des corrections différentielles nécessite le calcul des dérivées partielles de la fonction par rapport aux inconnues; nous l'avons fait numériquement en donnant de petits accroissements aux variables. Il n'y a pas lieu de se poser le problème de la validité rigoureuse de ce calcul, mais de s'assurer numériquement de la convergence des solutions successives vers une solution satisfaisante. Cela implique seulement que les quantités d'ordre 2 qui ont été négligées sont suffisamment petites.

Certains auteurs multiplient d'ailleurs les valeurs trouvées de leurs corrections différentielles par un facteur empirique pour accélérer la rapidité de la convergence.

Détermination des éléments osculateurs, le demi-grand axe étant connu. — Dans le tableau IV nous avons donné un exemple numérique qui montre que sur un petit arc de trajectoire, il est impossible de déterminer les six éléments orbitaux avec précision. On est amené à fixer un des paramètres, le demi-grand axe par exemple; ce dernier lié à la période par la troisième loi de Kepler, ne peut en effet être défini que lorsque le satellite a accompli une révolution. Dans ce cas quand on détermine (x, y, z, x', y', z') à un instant t , il est relativement simple de s'imposer connu le paramètre

orbital a . Cela revient à s'imposer une relation entre les six paramètres. On a la relation suivante :

$$(1) \quad \frac{V^2}{GM} = \frac{2}{r} - \frac{1}{a},$$

V est la vitesse du satellite, r le rayon vecteur, GM la constante de gravitation. La relation (1) peut s'écrire

$$(2) \quad \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{GM} = 2(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{a}.$$

En différentiant cette relation, on obtient

$$(3) \quad \frac{x' dx + y' dy + z' dz}{GM} = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} (x dx + y dy + z dz) + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a + da} \right),$$

a correspond au demi-grand axe de l'ellipse osculatrice définie par (x, y, z, x', y', z') , $a + da$ au demi-grand axe de l'ellipse définie par $(x + dx, \dots, z' + dz')$. La suite des calculs se fait ainsi :

On part d'une première solution définie par $(x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0)$. On calcule les éléments osculateurs correspondants $(a_0, \dots, M_0)$, puis les termes à courte période introduits par l'aplatissement terrestre; la vraie valeur de a_0 est alors $a''_0 + da$ (da , terme à courte période; a''_0 , demi-grand axe moyen imposé). On est ramené à résoudre un système de N équations à six inconnues par les moindres carrés, mais devant satisfaire en outre à la relation (3). Dans chaque équation, on peut substituer une inconnue, par exemple dz' , en fonction des autres grâce à cette relation; il restera à résoudre un système de N équations à cinq inconnues. Il faut faire plusieurs itérations; on constate que les solutions sont parfaitement convergentes. En général, quatre ou cinq itérations suffisent.

3. Détermination des éléments moyens instantanés. — D'après le formulaire donné par D. Brouwer [31], il est possible de calculer les éléments moyens instantanés lorsqu'on connaît les éléments osculateurs. La théorie de Brouwer utilise un potentiel terrestre limité aux premiers termes. Il suffit de corriger ces éléments osculateurs des termes à courte période, puis de ceux à longue période. Il faut seulement noter que les termes à courte période sont en toute rigueur fonction des éléments affectés seulement des termes à longue période. Comme au départ les éléments osculateurs sont affectés des termes à courte et à longue période, il sera nécessaire de faire ce calcul par itération (F. Barlier [17]). A titre d'exemple, nous donnons la valeur des termes à courte période après une, puis deux itérations (tableau V).

La même remarque est à faire pour le calcul des termes séculaires fonctions des éléments corrigés des termes à courte et à longue période.

Les différences qui apparaissent sur le tableau sont très faibles. Mais dans un calcul numérique, il est important d'avoir plus de décimales que celles strictement significatives; nous en avons tenu compte.

Notons aussi que, par suite des différentes perturbations (frottement atmosphérique, pression de radiation solaire), ces éléments moyens varient au cours du temps. Ils sont seulement corrigés des termes périodiques introduits par le potentiel terrestre.

TABLEAU V.

Unités.....	$\delta a.$ km.	$\delta e.$ 10^{-5} rad.	$\delta i.$ 10^{-5} rad.	$\delta \Omega.$ 10^{-5} rad.	$\delta \omega.$ 10^{-5} rad.	$\delta M.$ 10^{-5} rad.
1 ^{re} Itération.....	3,850	6,26	22,85	9,24	525,98	540,31
2 ^e Itération.....	3.852	6,17	22,84	9,21	528,48	542,82

$a, 7878,05$; $e, 0,0401$; $i, 0,8240$; $\Omega, 3,5690$; $\omega, 5,3699$; $M, 2,1933$.

CHAPITRE II.

JUSTIFICATION ET ÉTUDE DE LA MÉTHODE. CALCUL D'ERREUR.

Dans la deuxième étape du calcul, nous avons déterminé les corrections différentielles de la position et de la vitesse du satellite, de façon à représenter au mieux les résultats des observations selon la méthode des moindres carrés. Sur le plan mathématique la méthode est correcte, à condition de supposer que le critère des moindres carrés est appliqué conformément aux hypothèses classiques de la théorie (Linnik [20, chap. VI]); les erreurs d'observation sont des quantités indépendantes, Normales de moyenne nulle, les poids des observations sont donnés; la linéarisation du problème est légitime, le champ de force est connu. Il est certain que même si ces conditions ne sont pas parfaitement satisfaites, on peut encore appliquer cette méthode; mais il faut alors chercher à estimer la précision des paramètres calculés et la valeur qu'on peut leur attribuer.

La linéarisation du problème est tout à fait légitime ici; on peut écrire

$$(O - C)_x = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \dots + \frac{\partial f}{\partial z'} dz' + O(dx^2, \dots, dz'^2),$$

quand $dx, \dots, dz'$ restent à l'intérieur de l'intervalle de confiance, $(O - C)_x$ est une fonction linéaire de $dx, \dots, dz'$, comme on le vérifie numériquement.

1. Étude des observations. — *Indépendance et précision des mesures, erreurs systématiques possibles.* — A un instant donné, on repère photographiquement l'image du satellite par rapport au champ des étoiles.

On calcule ses deux coordonnées équatoriales α et δ , ascension droite et déclinaison. Nous avons exposé cette technique en détail avec P. Muller [12]. Il faut distinguer plusieurs phases essentielles dans cette opération :

- la prise du cliché nécessitant le guidage suivant le mouvement diurne;
- la mesure des positions sur la plaque photographique;
- le calcul pour passer des coordonnées mesurées ($\hat{x}$, $\hat{y}$), aux coordonnées équatoriales α et δ ;
- l'enregistrement des temps.

Dans les deux premières phases le facteur humain joue un rôle essentiel, analysons-les d'abord.

Le guidage. — Pour faire apparaître un nombre suffisant d'étoiles et des images stellaires ponctuelles, on entraîne la caméra suivant le mouvement diurne. Or un mécanisme d'entraînement n'est jamais parfait (axe du monde de la monture équatoriale mal réglé, vis imparfaites, moteur trop rapide ou trop lent). L'étoile-guide oscille de part et d'autre du centre du réticule. Si cela n'est pas un inconvénient majeur pour les étoiles qui intègrent en moyenne toutes les erreurs de guidage au cours du temps de la même façon, cela l'est pour le satellite. Il subit totalement l'erreur instantanée de guidage. Étudions-en les conséquences. Pratiquement on fait des séries d'interruptions (ou de crans) à l'aide d'un système mécanique. Ces séries sont espacées dans le temps d'une dizaine de secondes et, à l'intérieur de chaque série, les crans sont espacés de seconde en seconde. Étant donné cette cadence, il n'est pas possible de maintenir parfaitement en position l'étoile-guide de seconde en seconde; c'est une source d'erreur systématique à l'intérieur de chaque série. Par contre, au bout d'une quinzaine de secondes, l'observateur a pu corriger l'écart de guidage et la position de l'étoile-guide par rapport au centre du réticule est devenue indépendante de ce qu'elle était 15 s auparavant. Un tel schéma d'erreurs a été étudié par L. Arbey dans son travail sur les erreurs liées [21].

Dans l'avenir, il sera possible de s'en affranchir souvent. Dès à présent nous disposons d'obturateurs appropriés qui permettent d'avoir à la fois les images ponctuelles des étoiles et du satellite [22]. D'autre part, on dispose de chambres à grande ouverture qui permettent d'avoir même sur des poses très courtes, des étoiles de faible magnitude. Citons en France la future chambre 300/900. Les impératifs de guidage imposés tombent de ce fait (nombre suffisant d'étoiles et images ponctuelles). Ils subsistent seulement pour les satellites faibles. Signalons ici qu'il existe une autre cause d'erreurs dont les conséquences sont identiques : ce sont les oscillations lentes de la réfraction.

Indépendance des mesures faites sur la plaque photographique avec un comparateur de haute précision. — On détermine par leurs coordonnées rectangulaires les positions d'un certain nombre d'étoiles (disons 20) et celles du satellite. La première difficulté est liée à l'aspect très différent de ces images. L'étoile se présente sous la forme d'une tache ponctuelle ou symétrique, le satellite sous la forme d'une trace continue interrompue ou ayant des crans perpendiculaires. Pour faire une bonne mesure, il est commode d'orienter la plaque sur la machine à mesurer de façon à rendre un des axes parallèle à la trace du satellite [12]. L'autre lui est approximativement perpendiculaire. Le pointé se fait par encadrement; on cherche à rendre une image symétrique en $\hat{x}$ et en $\hat{y}$. Cette opération conduit à des mesures en $\hat{x}$ et $\hat{y}$ qui sont indépendantes. En effet, en analysant un grand nombre de mesures sur les étoiles et les positions du satellite, nous n'avons pas observé d'écarts quadratiques indiquant en moyenne une précision plus grande en $\hat{x}$ qu'en $\hat{y}$ ou inversement. Il s'ensuit que tout autre système de coordonnées X, Y déduit de $\hat{x}, \hat{y}$ par une rotation d'axes aura la même densité de probabilité que $(\hat{x}, \hat{y})$ (Linnik [20, n°2.3.2]). En particulier, cela est vrai pour un système d'axes dont un axe serait parallèle à la direction Nord-Sud de la plaque photographique. Comme $\alpha \cos \delta$ et δ sont respectivement proportionnels à X et Y , on en déduit que les mesures de $\alpha \cos \delta$ et δ sont finalement des mesures indépendantes avec une même densité de probabilité.

Si nous considérons maintenant l'opération dans son ensemble, elle comporte deux étapes : le pointé sur l'image mesurée que nous venons d'étudier et la lecture des règles de référence. La lecture en elle-même n'introduit aucune erreur, elle se fait avec une précision surabondante du dixième de micron, mais les nombres lus sont à corriger des erreurs de trait des règles de référence. Ces erreurs sont plus ou moins bien connues, elles ne sont pas systématiques sur toute une partie du cliché, mais peuvent l'être localement. On retrouve ici des erreurs liées pour les traits rapprochés. Ces erreurs sont très petites, de l'ordre du micron.

Le calcul de réduction. — Nous avons étudié avec un soin particulier la méthode de réduction; en particulier, nous nous sommes d'abord assurés qu'elle n'introduisait pas d'erreurs systématiques; nous renvoyons pour cela à ce que nous avons publié avec P. Muller [23]. Mais localement, la réduction peut introduire des erreurs systématiques sur les positions du satellite distantes seulement de quelques secondes dans le temps. Nous l'avons mis en évidence en réduisant un même cliché avec deux séries d'étoiles différentes. On trouve pour des positions très voisines du satellite des écarts systématiques identiques. Nous nous retrouvons devant des erreurs liées comme celles signalées précédemment. Ces erreurs peuvent être de l'ordre de l'écart quadratique moyen des étoiles, c'est-à-dire ici de l'ordre de $1''$ ou $2''$.

Enfin dans ce calcul de réduction, entrent des positions d'étoiles affectées d'erreurs systématiques de catalogue fonctions de la zone du ciel où a été pris le cliché photographique. Ces erreurs sont sensiblement inférieures aux autres (quelques dixièmes de seconde d'arc) (F. Scott [32]).

L'enregistrement des temps, la marche du chronographe. — La marche de notre chronographe peut être considérée comme nulle. Il s'agit d'un chronographe asservi par un étalon atomique. Il ne peut y avoir qu'une erreur systématique dans l'origine des temps. Sa correction par rapport à un temps de référence peut être ramenée à zéro.

L'origine des temps intervient seulement dans le calcul de la position de l'observateur, mais une erreur de quelques millisecondes ne peut conduire à des erreurs sensibles pour ce calcul.

Conclusion et forme du critère de moindres carrés adopté. — D'après tout ce qui précède, sauf pour des positions rapprochées de quelques secondes dans le temps, les valeurs trouvées pour α et δ peuvent être considérées comme des valeurs indépendantes obéissant à la Loi Normale. Si des erreurs systématiques existent dues en particulier aux erreurs de catalogue, elles sont beaucoup plus petites. Considérons de telles observations. Il est légitime de leur appliquer le critère des moindres carrés. Par suite du guidage, la mesure en α est moins sûre que celle en δ ; il n'est pas possible de fixer un rapport, cela dépend de l'habileté de l'observateur et de la position plus ou moins commode dans laquelle il a observé. Il faut procéder en deux étapes. Dans un premier stade, on ne fera porter aucune pondération sur $(O - C)_\alpha \cos \delta$ et $(O - C)_\delta$. Dans un deuxième stade, d'après les valeurs trouvées pour les résidus, on déduira une pondération correspondante convenable.

Il faut souligner que, si le guidage n'avait pas été fait suivant le mouvement diurne mais suivant la trajectoire du satellite, le problème se poserait d'une façon différente; la plus grande incertitude se trouverait dans le sens de la trajectoire du satellite. Dans ce cas, la méthode correcte est celle utilisée par le Smithsonian Observatory dans sa détermination des orbites [18]; il faut utiliser d'autres variables. Si la caméra est fixe, les problèmes d'entraînement ne se posent plus. Si la notation des temps est considérée comme une source d'erreurs aléatoires, on peut appliquer le critère des moindres carrés sous la forme proposée par H. Merson [25].

Il est maintenant possible d'utiliser simultanément toutes les observations, c'est-à-dire même celles qui, localement, sont dépendantes les unes des autres; mais il faut procéder différemment spécialement pour l'estimation de la précision avec laquelle sont déterminés les paramètres. Pour cela, nous nous référons au travail de L. Arbey [21].

Dans le schéma ordinaire, on considère une erreur x_i comme la somme d'un nombre d'erreurs jz_i dont les causes sont indépendantes (les notations sont celles de L. Arbey).

Pour tenir compte des liaisons internes, Arbey propose de considérer que les composantes élémentaires des erreurs ont une influence décroissante, lorsque la distance augmente (ici le temps) et il écrit :

$$x_i = \varepsilon_i + \sum_{j=1}^n [A_{0j}\varepsilon_1 + A_{1j}\varepsilon_{i-1} + \dots + A_{kj}\varepsilon_{i-k} + \dots],$$

ε_i est une erreur accidentelle du type classique, les A_{kj} décroissent lorsque k augmente. Ce schéma traduit les liaisons entre les observations, liaisons dues au guidage, à la mesure du cliché, à la réduction imparfaite du cliché, aux déformations locales de l'objectif, de la gélatine, etc.

Arbey propose de grouper les observations par paquets de n observations. De chaque paquet, on déduit un point moyen par lissage. Il démontre alors rigoureusement qu'il est légitime d'appliquer la théorie classique à ces points moyens pour estimer les paramètres. Si l'on conserve tous les points, on ne fausse pas en général la valeur du résultat, mais on surestime toujours la précision.

Pour un écart quadratique moyen donné, il faut en effet accorder d'autant plus de confiance à un résultat, qu'il repose sur un plus grand nombre d'observations indépendantes comme le fait la loi de Student. Lorsqu'on considère trop de mesures comme indépendantes, on surestime le résultat. Schmitt à l'observatoire de Strasbourg procède systématiquement de cette façon [26]. Pour chaque série d'une dizaine de secondes, il calcule ce qu'on appelle les lieux normaux. Comme nous l'avons constaté, on aboutit à la même détermination des éléments orbitaux en utilisant tous les lieux normaux et toutes les observations, mais les estimations de la précision des paramètres sont différentes.

2. Estimation de la valeur des paramètres déterminés. — Nous supposons d'abord que nous sommes dans les conditions légitimes d'application du critère des moindres carrés. Lorsqu'on connaît l'écart quadratique moyen des observations, l'erreur probable sur un paramètre E_i est égale à (Linnik [20, chap. VI, n°8]

$$e_p(E_i) = \sigma^2 (C^{-1})_{ii},$$

où C^{-1} est la matrice inverse de celle des équations normales. Cette erreur à une probabilité de 2/3 de ne pas être dépassée. Dans la réalité σ est une inconnue et nous connaissons seulement une estimation de σ à partir de la quantité s

$$s^2 = \frac{1}{N-n} \sum_{i=1}^N (O - C)^2 \alpha_j \cos^2 \delta_j + (O - C)^2 \delta_j^2,$$

N est le nombre d'observations, n le nombre d'inconnues. Ce point de vue est bon si $N - n$ est au moins égal à 20, mais peut l'être beaucoup moins dans le cas contraire. Il est alors préférable d'utiliser le fait que la quantité

$$t_i = \frac{\tilde{E}_i - E_i}{\sqrt{C_{ii}^{-1} \cdot s}}$$

est une variable de Student à $N - n$ degrés de liberté. C_{ij} sont les coefficients de la matrice C^{-1} . $\tilde{E}_i$ est une solution des équations normales, E_i est la vraie valeur du paramètre; c'est donc une inconnue. Si l'on se donne une probabilité de $x\%$, il existe un nombre γ tel qu'on est assuré d'avoir la relation suivante avec la probabilité donnée (Linnik [20, chap. VI, n° 8]) :

$$\tilde{E}_i - \gamma \sqrt{C_{ii}^{-1}} \leq E_i \leq \tilde{E}_i + \gamma \sqrt{C_{ii}^{-1}},$$

Si nous utilisons des observations avec des erreurs liées dans le sens d'Arbey [21], le nombre de degrés de liberté n'est pas égal à $N - n$, mais à $N_c - n$, où N_c est le nombre de paquets d'observations indépendants. Ce sont ces principes que nous avons toujours appliqués dans la suite avec $x\%$ égal à 95 %.

Dans la pratique, nous avons déterminé les coordonnées cartésiennes et la vitesse du satellite à un instant donné. Le calcul d'erreur va donc fournir les erreurs probables sur ces dernières quantités, mais il est tout à fait possible d'en déduire les erreurs probables sur les paramètres orbitaux classiques. On a en effet les relations suivantes qui permettent de calculer l'erreur à craindre sur le demi-grand axe σ_a :

$$\sigma_a = \sigma \left[C_{11} \left(\frac{\partial a}{\partial x} \right)^2 + C_{22} \left(\frac{\partial a}{\partial y} \right)^2 + \dots + C_{66} \left(\frac{\partial a}{\partial z'} \right)^2 + 2 C_{12} \left(\frac{\partial a}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial a}{\partial y} \right) + \dots + 2 C_{16} \left(\frac{\partial a}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial a}{\partial z'} \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

On a des relations analogues pour les autres éléments.

Influence de certaines erreurs systématiques. — Le calcul précédent supposait que les erreurs étaient aléatoires. Étudions maintenant l'influence de certains types d'erreurs systématiques pouvant exister.

En faisant des hypothèses raisonnables sur leurs origines et leurs valeurs, nous n'avons d'autre prétention que de dégager quelques ordres de grandeur en sondant numériquement le problème.

La détermination des éléments orbitaux osculateurs à un instant donné revient au calcul de la position et de la vitesse du satellite ou encore, conformément aux équations de Laplace [17], au calcul des coordonnées équatoriales topocentriques et de leurs dérivées premières et secondes α_0 , α'_0 , α''_0 , δ_0 , δ'_0 , δ''_0 . Nous allons étudier les conséquences de certaines erreurs

sur α_0 , α'_0 , α''_0 , δ_0 , δ'_0 , δ''_0 et nous en déduisons les conséquences sur les paramètres orbitaux. D'après ce qui a été vu, l'origine des erreurs systématiques peut être :

- une dérive de chronographe;
- le guidage;
- la réduction (erreurs des constantes du cliché, déformation due à une réduction imparfaite);
- le système de référence.

J. Kovalevsky [27] a montré que les erreurs dues à une dérive du chronographe pouvaient se présenter pour α'_0 , δ'_0 sous la forme $\alpha'_0 (1 + \varepsilon)$, $\delta'_0 (1 + \varepsilon)$, pour α''_0 , δ''_0 , sous la forme $\alpha''_0 (1 + 2\varepsilon)$, $\delta''_0 (1 + 2\varepsilon)$. Une erreur de guidage (erreur en angle horaire) se traduit de la même façon pour α'_0 et α''_0 mais est négligeable au premier ordre pour δ'_0 , δ''_0 . Les deux autres types d'erreurs se traduisent par des erreurs de la forme $\alpha_0 + \Delta\alpha$, $\delta_0 + \Delta\delta$. On peut faire des hypothèses raisonnables sur ε , en tenant compte qu'au bout d'un temps Δt , l'écart en α devient $\alpha'_0 \varepsilon \Delta t$, et que cette quantité ne dépasse pas la précision des observations ($3 \cdot 10^{-5}$ rad) au bout de la durée d'un cliché (100 s). Nous n'avons pas considéré en fait l'erreur de dérive du chronographe, elle n'est plus admissible aujourd'hui. Nous avons donc envisagé plusieurs hypothèses correspondant à $\varepsilon = 10^{-4}$, $\varepsilon = 10^{-5}$, puis $\Delta\alpha$ et $\Delta\delta$ égaux respectivement à 10^{-5} et 10^{-6} rad. Nous donnons les résultats dans le tableau VI. Ces valeurs nous ont servi à juger si les éléments orbitaux déduits des observations s'écartent de façon admissible ou non de la courbe d'évolution théorique.

TABLEAU VI.

Unités....	$\delta\alpha$. km.	$\delta\varepsilon$. 10 ⁻⁵ rad.	δi . seconde de degré.	$\delta\Omega$. seconde de degré.	$\delta\omega$. seconde de degré.	δM . seconde de degré.
$\varepsilon = 10^{-4}$	0,584	9,607	2",427	8",518	36",880	21",699
$\varepsilon = 10^{-5}$	0,058	0,969	0,241	0,845	3,692	2,165
$\Delta\alpha = 10^{-5}$	0,054	0,804	0,233	1,753	2,578	3,279
$\Delta\alpha = 10^{-6}$	0,025	0,388	0,117	0,866	1,381	1,753
$\Delta\delta = 10^{-5}$	0,837	10,556	0,451	0,206	76,957	77,204
$\Delta\delta = 10^{-6}$	0,422	5,305	0,231	0,103	38,736	38,880

Ce tableau montre la nécessité d'un excellent guidage. Une étude publiée par J. Kovalevsky [27] montre d'ailleurs qu'une erreur correspondant à $\varepsilon = 10^{-4}$ peut avoir une influence plus grande encore que celle indiquée dans le cas d'autres satellites que celui étudié ici. Cependant compte tenu des progrès techniques réalisés aujourd'hui dans ce domaine, l'influence de ces erreurs doit rester en principe relativement faible et même inférieure au cas le plus pessimiste que nous ayons envisagé.

Remarques sur l'élimination des observations aberrantes. — Lorsqu'on traite un grand nombre d'observations, il arrive souvent que des résidus s'écartent notablement de la moyenne. La première réaction est de les éliminer; la probabilité pour qu'une grandeur aléatoire s'écarte de plus de trois fois de l'écart quadratique moyen est pratiquement nulle (égale à 0,003). On se basera sur ce fait. Ce système a l'avantage de très bien s'automatiser, lorsqu'on désire établir des éphémérides provenant de sources multiples, qui n'ont pu être ni contrôlées ni filtrées et peuvent présenter des erreurs matérielles nombreuses. Dans le cas où l'on veut déterminer des orbites dans un but de recherches géodésiques, c'est une façon commode d'aboutir à une solution représentant bien les observations avec des résidus petits. Mais il ne faut pas s'en tenir à cette solution, il faut calculer de nouveau tous les résidus rejetés et alors, seule une étude très critique doit permettre de rejeter une observation dans la mesure où son résidu est imputable à une erreur matérielle. Si l'on ne procède pas ainsi, plusieurs critiques importantes peuvent être faites.

Tout d'abord, lorsqu'une observation a un résidu notablement plus important (de l'ordre de trois fois l'écart quadratique moyen), elle peut être attribuée à une erreur matérielle ou à un phénomène local non inclus dans le modèle servant à la représentation des observations

D'autre part, le rejet d'observations un peu moins bonnes, peut nuire très sensiblement à la précision des éléments orbitaux, si ces observations sont très bien « placées » sur l'orbite. Avec un écart quadratique moyen plus grand, on peut parfaitement obtenir une meilleure précision sur les éléments orbitaux, comme nous l'avons souvent constaté.

Cependant, dans certains cas, on peut chercher à ne conserver que les résidus les meilleurs, si l'on espère mettre ainsi en évidence un phénomène local, de petite amplitude par exemple. Cela est justifié, si l'on s'impose dans l'avenir d'autres expériences venant confirmer les premières.

3. Le champ de forces. — Le calcul indiqué pour la détermination des éléments osculateurs n'a de sens que si le champ de forces est correctement décrit.

Un satellite artificiel proche de la Terre est soumis à un ensemble de forces diverses. Il faut distinguer :

- les forces dues à l'attraction gravitationnelle de la Terre et du système solaire;
- les forces dues au frottement atmosphérique;
- les forces exercées par la pression de radiation solaire, aussi bien celle qui agit directement sur le satellite que celle qui est réfléchie par la Terre;
- les forces d'origines électrique et magnétique [49];
- les forces de nature variée, en général très faibles et négligeables sauf dans des cas spéciaux de résonance : effet de Poynting-Robertson, Shapiro [34], effet relativiste, J. P. Richard [50], etc.

4. **Calcul des éléments osculateurs et des perturbations sur une période.** — Nous nous sommes attaché à déterminer les éléments orbitaux sur des arcs de trajectoire très courts de 15 à 20° géocentriques. Cependant, il n'est pas possible de déterminer le demi-grand axe sur un tel arc, il faut des observations réparties au moins sur deux révolutions successives. Dans cette perspective, nous allons étudier l'influence des différentes perturbations sur une révolution, et séparer les effets des différents types de perturbation. Nous donnerons des valeurs numériques et des courbes à titre indicatif. Elles correspondent à l'exemple numérique traité au cours du travail et sont valables seulement dans ce cas, c'est-à-dire pour *Écho I*, juillet 1962. Au premier ordre, la solution générale du problème peut être considérée comme la somme des solutions particulières. Ce point de vue est légitime, étant donné la petitesse des perturbations et le temps de leur action (une révolution).

Les forces de gravitation. — Nous nous limitons au potentiel terrestre. D'après nos calculs, l'action de la Lune et du Soleil est négligeable. Nous pouvons également assimiler le mouvement du satellite à celui d'un point matériel (Duboschin [65]). Par négligeable, nous entendons toujours une grandeur sensiblement inférieure à la précision avec laquelle on peut déterminer les paramètres orbitaux, c'est-à-dire pratiquement de l'ordre de 10^{-6} rad. Il faut distinguer plusieurs sortes de termes :

a. *Les termes séculaires* : Ils n'existent que pour Ω , ω , M et se présentent sous la forme d'un développement infini en J_2 , J_2^2 , J_4 , J_6 , ...

$$M = [n_0 + n_1 J_2 + n_2 J_2^2 + n_3 J_4 + \dots] t,$$

t désignant le temps; n_0 , n_1 , n_2 étant des fonctions des paramètres orbitaux (demi-grand axe, excentricité, inclinaison). Dans le tableau VII nous donnons la valeur de $n_1 J_2$, $n_2 J_2^2$, $n_3 J_4$ en radian par seconde. On voit que l'influence de J_2^2 ou de J_4 reste pratiquement négligeable au bout d'une révolution ($7 \cdot 10^3$ s) et ne dépasse pas 10^{-5} rad. A titre indicatif, nous donnons ces valeurs pour deux jeux de constantes J_2 , J_4 , GM et R .

TABLEAU VII.

Variations séculaires.	$J_2 \left\{ \begin{array}{l} 1082,20 \cdot 10^{-6} \\ 1082,70 \cdot 10^{-6} \end{array} \right.$	$J_2^2.$	$J_4 \left\{ \begin{array}{l} 2,10 \cdot 10^{-6} \\ 1,64 \cdot 10^{-6} \end{array} \right.$
M (rad/s).....	$\left\{ \begin{array}{l} +1,83619 \cdot 10^{-7} \\ +1,83689 \cdot 10^{-7} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} +1,313 \cdot 10^{-10} \\ +1,314 \cdot 10^{-10} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} -1,591 \cdot 10^{-12} \\ -1,227 \cdot 10^{-12} \end{array} \right.$
ω (rad/s).....	$\left\{ \begin{array}{l} +6,26852 \cdot 10^{-7} \\ +6,27088 \cdot 10^{-7} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} +8,189 \cdot 10^{-10} \\ +8,195 \cdot 10^{-10} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} -1,221 \cdot 10^{-9} \\ -0,942 \cdot 10^{-9} \end{array} \right.$
Ω (rad/s).....	$\left\{ \begin{array}{l} -6,52775 \cdot 10^{-7} \\ -6,53021 \cdot 10^{-7} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} -5,516 \cdot 10^{-10} \\ -5,520 \cdot 10^{-10} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} -1,173 \cdot 10^{-10} \\ -0,905 \cdot 10^{-10} \end{array} \right.$
$GM = 3,98613 \cdot 10^5, \quad R = 6378,388; \quad GM = 3,98603 \cdot 10^5, \quad R = 6378,160.$ $a = 7883,280; \quad e = 0,040420; \quad i = 0,824714.$			

A *fortiori*, l'effet des autres coefficients étant plus faible, leur somme l'est aussi sur une telle durée, mais ce point ne doit pas être considéré comme définitivement acquis. C'est une hypothèse que rien jusqu'à présent n'est venu contredire et qui permet de bien représenter les observations sur une courte durée. Nous nous limitons donc à J_2^2 et J_4 .

b. *Les termes à courte période* : Les coefficients du premier ordre sont de l'ordre de J_2 . Nous avons tracé les courbes représentatives de ces termes (fig. 2 à 7). L'unité des variables angulaires est le radian, ou des

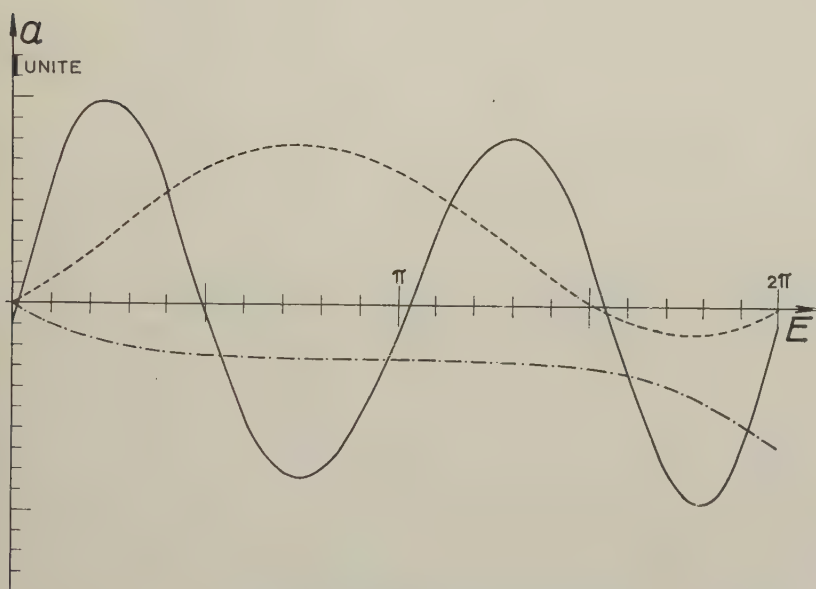


Fig. 2 — Demi-grand axe.

Étude comparative des principaux effets perturbateurs sur une révolution.

————	Aplat. terrestre.	Unité : 500 m;
-----	Pression rad. sol.	» : 10 m;
- · - · -	Frot. atmosphérique.	» : 1 m,

en fonction de l'anomalie excentrique (*Écho I*, 10 juillet 1962).

fractions décimales de radian, celle des variations du demi-grand axe, des multiples du mètre. La variable est l'anomalie excentrique. Il faut tenir compte de ces termes, même pour quelques degrés géocentriques. Les coefficients d'ordre supérieur sont négligeables puisque leur amplitude est en moyenne mille fois plus faible que celle des précédents.

c. *Les termes à longue période* : La période de ces termes est environ mille fois plus grande que la précédente, si bien que, même si l'amplitude

des termes est de l'ordre de grandeur des termes à courte période, leur variation par révolution reste insignifiante. Elle peut atteindre 10^{-5} rad au maximum pour ω ou M séparément et se compensent dans $\omega + M$. Nous les avons négligés.

Le frottement atmosphérique et la pression de radiation solaire. — Nous avons intégré numériquement leurs effets sur une révolution. Nous en avons tracé les courbes représentatives (fig. 2 à 7). L'effet de la pression de

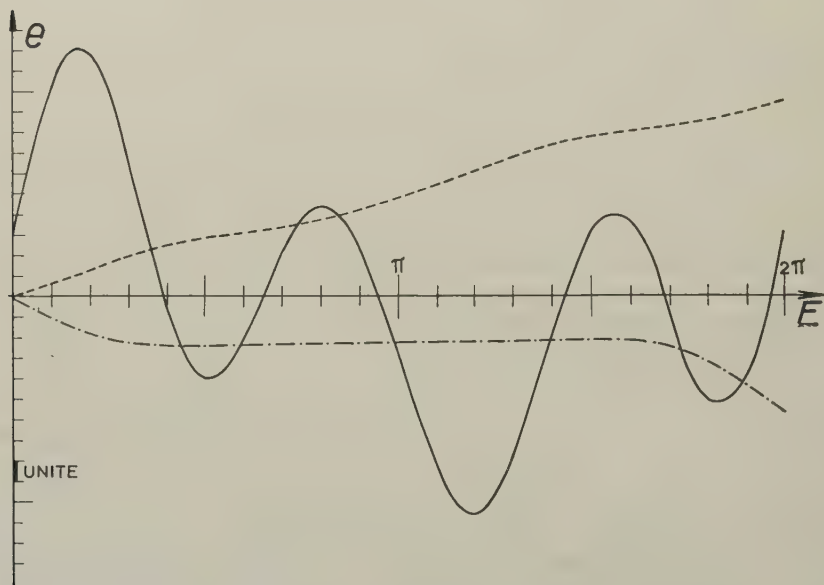


Fig. 3. — Excentricité.

Étude comparative des principaux effets perturbateurs sur une révolution.

—	Aplat. terrestre.	Unité : $5 \cdot 10^{-5}$ rad;
- - -	Pression rad. sol.	» : $2 \cdot 10^{-6}$ rad;
- · - · -	Frot. atmosphérique.	» : 10^{-7} rad.

en fonction de l'anomalie excentrique (*Écho I*, 10 juillet 1962).

radiation est beaucoup plus important dans ce cas que celui du frottement atmosphérique. Ces effets sont fonction de plusieurs paramètres variables au cours du temps, comme la densité atmosphérique ou la longitude du Soleil. Cet exemple numérique fixe les ordres de grandeur et donne l'allure moyenne des phénomènes. Les variations sont insignifiantes sur un arc géocentrique d'une quinzaine de degrés, mais il n'en est plus de même sur une révolution. Nous en avons donc tenu compte en ajoutant

un terme de dérive linéaire représentant la variation correcte de l'élément au bout d'une révolution. Deux raisons justifient ce procédé :

1° Ces corrections sont faibles et jouent peu dans le résultat final du calcul. Nous avons pu nous en assurer en faisant des études comparatives, c'est-à-dire en tenant compte des perturbations, puis en les négligeant. Les variations subies par les éléments orbitaux sont de l'ordre de grandeur de la précision de leur détermination, c'est-à-dire presque négligeables sur une révolution.

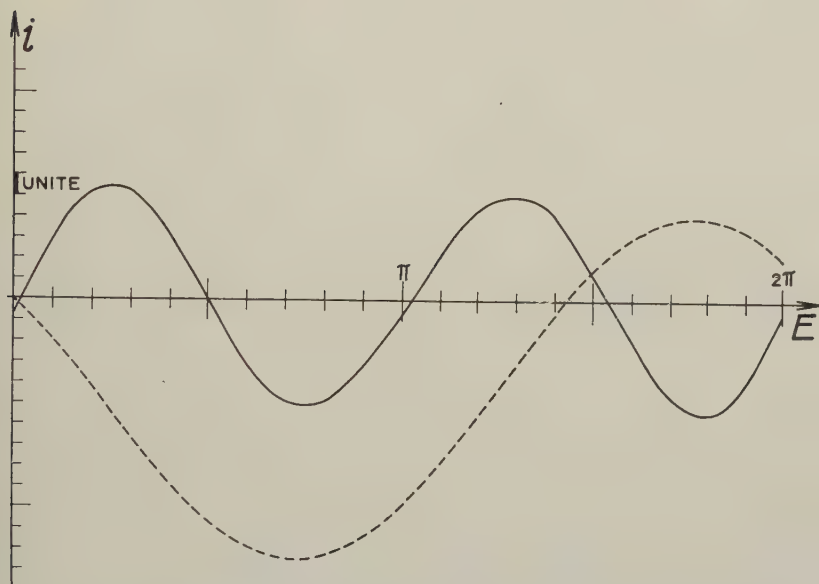


Fig. 4. — Inclinaison.

Étude comparative des principaux effets perturbateurs sur une révolution.

——— Aplat. terrestre. Unité : $5 \cdot 10^{-5}$ rad;
 - - - - Pression rad. sol. » : 10^{-6} rad,

en fonction de l'anomalie excentrique (*Écho I*, 10 juillet 1962).

2° Les observations sont groupées sur le même arc de trajectoire. De ce fait, les variations des termes à courte période sont négligeables, et seuls influent les termes séculaires et les termes à longue période. Ces derniers sont d'ailleurs assimilables aux premiers sur ce court intervalle de temps.

Autres effets : Il s'agit essentiellement de celui de la pression de radiation solaire réfléchi par la Terre. D'après les études de Wyatt [43],

son effet ne dépasse pas 10 % de l'effet direct. Ceci le rend négligeable ici ainsi que les autres effets perturbateurs que nous avons mentionnés au paragraphe 3. « Le champ de force ».

4° *Effets inconnus* : Avant de conclure, étudions les conséquences d'une perturbation dont l'origine nous serait inconnue. Les observations sont toujours faites à partir d'une même station et groupées sur le même arc de trajectoire. Elles portent sur deux révolutions successives. Les

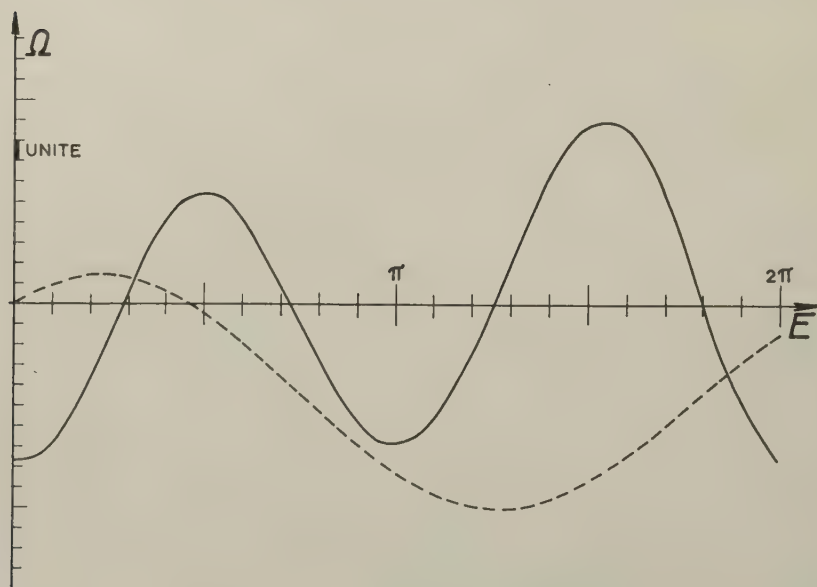


Fig. 5. — Ascension droite du nœud.

Étude comparative des principaux effets perturbateurs sur une révolution.

—— Aplat. terrestre. Unité : $5 \cdot 10^{-5}$ rad;
 ---- Pression rad. sol. » : $2 \cdot 10^{-6}$ rad,

en fonction de l'anomalie excentrique (*Écho I*, 10 juillet 1962).

éléments obtenus seraient donc affectés des termes à courte période dus à cette perturbation. Les effets n'introduiraient pas d'erreur dans la détermination des éléments orbitaux à condition que les variations des termes à courte période soient négligeables sur une vingtaine de degrés géocentriques. Il faudrait aussi que les termes séculaires ou à longue période aient des effets également négligeables sur une révolution.

Pour être observable, une telle perturbation devrait être au moins de l'ordre de celle du frottement atmosphérique. D'après les études actuelles sur les satellites son existence paraît donc douteuse. Cependant,

nos connaissances étant encore bien imparfaites, sur le champ de pesanteur par exemple, il convient de conserver un esprit attentif à cet égard et de bien étudier l'allure des résidus des observations.

En conclusion, nous nous trouvons dans les conditions les plus favorables qu'il soit possible de trouver pour que les forces perturbatrices inconnues ou de grandeur imprévisible aient un effet minimal. Le champ de forces tel que nous le connaissons ne doit pas en principe introduire d'erreurs systématiques dans la détermination de la trajectoire.

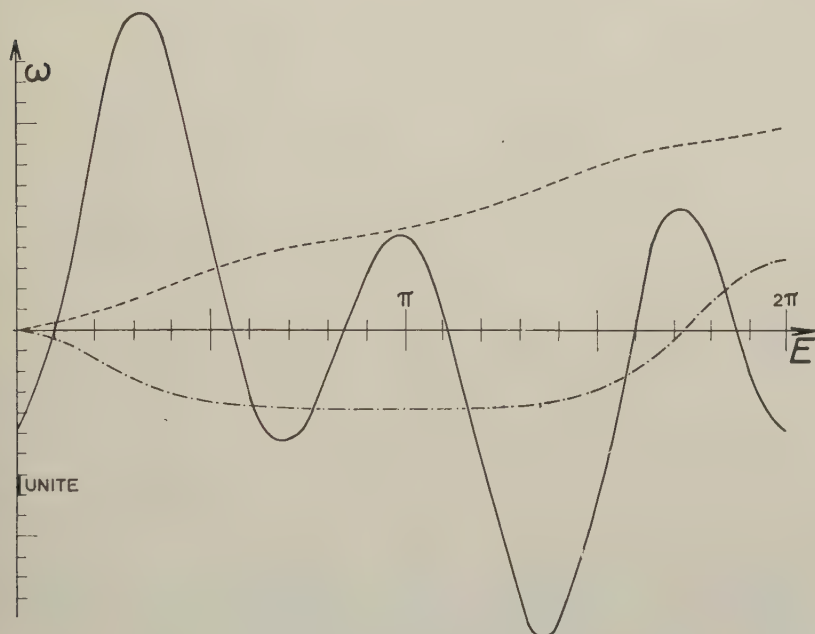


Fig. 6. — Argument du périégée.

Étude comparative des principaux effets perturbateurs sur une révolution.

———	Aplat. terrestre.	Unité :	10^{-3} rad;
----	Pression rad. sol.	» :	$5 \cdot 10^{-5}$ rad;
- · - · -	Frot. atmosphérique.	» :	10^{-6} rad,

en fonction de l'anomalie excentrique (*Écho I*, 10 juillet 1962).

5. **Étude d'une série d'observations du satellite *Écho I*.** — Au cours du mois de juillet 1962, une série de clichés photographiques du satellite *Écho I* a été prise à l'observatoire de Meudon. Dans le même temps l'observatoire de Strasbourg prenait quelques clichés très intéressants. Chaque passage du satellite donnait lieu en général à deux clichés. La trajectoire du satellite y était photographiée sur un arc géocentrique compris entre 3 et 5 degrés. Les clichés étaient espacés entre eux d'une

dizaine de degrés. Chaque fois que cela était possible, le satellite était photographié sur deux ou trois révolutions successives.

Nous avons cherché à calculer les éléments osculateurs et à estimer leur précision. Expliquons d'abord les faits qui nous ont amené à adopter notre méthode pour cette série d'observations. Les calculs donnés en exemple dans la première partie de ce travail montrent (tableau IV)

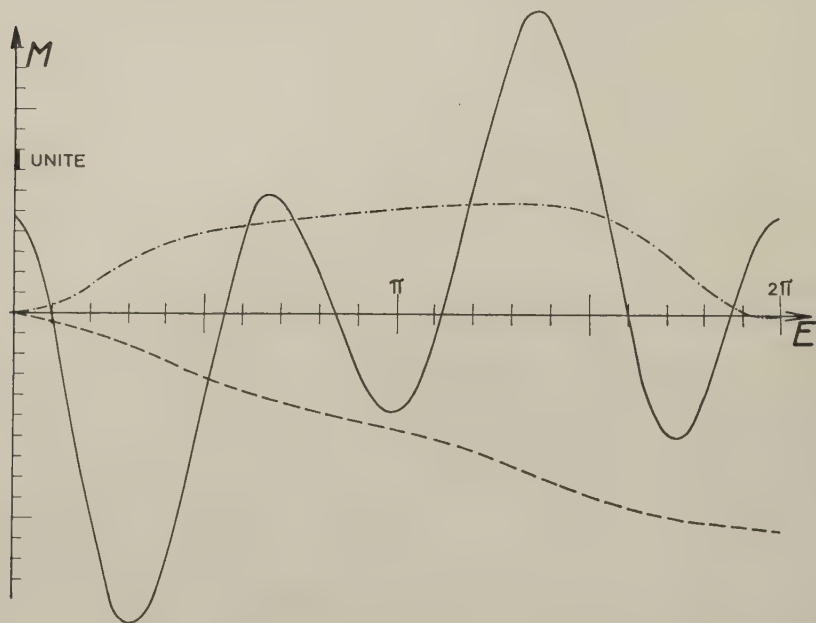


Fig. 7. — Anomalie moyenne.

Étude comparative des principaux effets perturbateurs sur une révolution.

—	Aplat. terrestre.	Unité :	10^{-3} rad;
- - -	Pression rad. sol.	» :	$5 \cdot 10^{-5}$ rad;
· · · · ·	Frot. atmosphérique.	» :	10^{-6} rad,

en fonction de l'anomalie excentrique (*Écho I*, 10 juillet 1962).

que sur un arc de 5 degrés géocentriques, les erreurs sur a peuvent atteindre de 100 à 200 km, sur e , ω , M , entre 10^{-1} et 10^{-2} rad, sur Ω et i entre 10^{-3} et 10^{-4} rad. Sur un arc plus grand, les écarts diminuent très notablement, mais restent encore grands par rapport à la précision des observations. Or c'est la précision des observations qui limite finalement celle des éléments. La distance Observateur-Satellite est environ le sixième de la distance centre Terre-Satellite. Si la précision des observations est de ε , celle des éléments ne pourra approximativement dépasser $\frac{\varepsilon}{6}$, car ε désignant l'erreur de visée, le rapport de l'arc topocen-

trique ε à l'arc géocentrique correspondant est égal à 6. Nous connaissons donc une limite théorique de ce que nous pouvons obtenir. Nous devons chercher à l'atteindre.

Pour étudier le problème, nous avons déterminé sur un exemple numérique les six éléments orbitaux de deux façons différentes, d'une part en utilisant les observations réparties sur deux révolutions, d'autre part en n'utilisant que les observations d'un seul passage. Nous avons calculé en même temps les erreurs probables. Ces calculs sont donnés dans le tableau VIII, avec les mentions marginales — calcul 1 et 2 —. Il apparaît

TABLEAU VIII.

« Écho I », passage du 10 juillet 1962 à Meudon, à 21 h 59 m 38 s.

Calcul.	a (km).	$e.p$ (m).	e (rad).	$e.p$ (10^{-5} rad).	i (rad).	$e.p$ (10^{-6} rad)
1.....	7 883,068	6	0,040 728	1,5	0,824 808	2,8
2.....	7 878,102	8682	0,041 022	41,0	0,824 843	28,0
3.....	7 883,053	—	0,040 687	4,9	0,824 812	10,3
4.....	7 883,068	—	0,040 728	—	0,824 814	7,0
5.....	7 883,068	—	0,040 728	—	0,824 810	11,4

	Ω (rad).	$e.p$ (10^{-3} rad).	ω (rad).	$e.p$ (10^{-4} rad).	M (rad).	$e.p$ (10^{-4} rad).
1.....	3,408 88	1,6	5,5536	3,1	1,9798	3,4
2.....	3,408 91	3,3	5,5410	230,0	1,9922	231,0
3.....	3,408 89	1,4	5,5532	3,2	1,9802	3,5
4.....	3,408 92	1,2	5,5524	1,2	1,9811	1,2
5.....	3,408 89	4,3	5,5536	—	1,9800	3,1

nettement que les erreurs probables sont sensiblement plus grandes dans le deuxième calcul que dans le premier. Les grandeurs les moins bien déterminées, c'est-à-dire pour lesquelles l'erreur probable est la plus grande, sont dans l'ordre : le demi-grand axe 8 km, l'anomalie moyenne et l'argument du périhélie $2,3 \cdot 10^{-3}$ rad., l'excentricité $4 \cdot 10^{-4}$ rad, l'ascension droite du nœud et l'inclinaison $3 \cdot 10^{-4}$ rad. Or, par suite des coefficients de corrélation entre les inconnues (tableau IX), les erreurs des grandeurs les moins bien déterminées se répercutent sur les autres. Cela veut dire que si la grandeur la moins bien déterminée était connue à l'instant de l'observation, les autres éléments pourraient être déterminés avec une meilleure précision. La logique exige donc de chercher à calculer les grandeurs les moins bien déterminées par une autre méthode, du moins dans toute la mesure du possible. Il faut, en outre, procéder par ordre, c'est-à-dire commencer par fixer le paramètre pour lequel l'erreur probable est la plus grande et procéder ensuite de façon récurrente (B. Lago [51]). Nous avons refait le calcul que nous avons appelé 3 dans le tableau en fixant le demi-grand axe, et nous avons constaté que les erreurs

probables devenaient beaucoup plus petites, presque aussi petites que dans le calcul 1, les valeurs numériques des éléments orbitaux restant très proches des résultats de ce calcul.

On peut se demander maintenant si, à ce stade, il y a intérêt à continuer le processus. Nous l'avons fait à titre d'expérience, en supposant ainsi connu le demi-grand axe, l'excentricité (tableau VIII, calcul 4), puis le demi-grand axe, l'excentricité, l'argument du périée (tableau VIII, calcul 5).

TABLEAU IX.

« *Écho I* », passage du 10 juillet 1962 à Meudon, à 21 h 59 m 38 s.

Coefficients de corrélation.

	$a.$	$e.$	$i.$	$\Omega.$	$\omega.$	$M.$
a	1,000	—	—	—	—	—
e	0,653	1,000	—	—	—	—
i	0,721	0,650	1,000	—	—	—
Ω	0,221	0,155	0,300	1,000	—	—
ω	0,972	0,460	0,637	0,194	1,000	—
M	0,961	0,424	0,620	0,192	0,999	1,000

On constate effectivement qu'on ne gagne plus rien ; les erreurs probables sont à peu près constantes et les valeurs numériques des éléments orbitaux varient peu. Nous avons fait d'autres calculs numériques et nous en concluons que, dans notre étude, il suffit de chercher une méthode pour déterminer le demi-grand axe, les cinq autres éléments osculateurs pouvant être déterminés à chaque révolution.

Pour cela nous avons utilisé les observations réparties sur deux révolutions successives qui, comme le montre le calcul 1, permettent de déterminer le demi-grand axe avec précision. Nous obtenons ainsi une série de valeurs discrètes du demi-grand axe moyen, entre lesquelles il est possible de faire des interpolations. Une question se pose : la valeur adoptée n'est pas une valeur osculatrice, mais une valeur moyenne déduite du mouvement du satellite sur une révolution. Il devient par conséquent indispensable d'étudier l'influence des erreurs sur a , résultant, soit d'écarts entre la valeur osculatrice et la valeur adoptée dus à une anomalie du potentiel par exemple, soit d'erreurs d'observation ou d'interpolation. Nous présentons un tableau donnant les variations des éléments en fonction des petites variations imposées à a . Bien que l'erreur probable sur le demi-grand axe ne dépasse pas une vingtaine de mètres, nous avons tenu à faire des calculs avec des écarts sur lui de 100 m ; les résultats sont satisfaisants (tableau X) ; les variations sur les éléments orbitaux restent très faibles, tout particulièrement pour l'inclinaison et l'ascension droite du nœud. La quantité qui varie le plus est l'excentricité. Pour les autres éléments, les variations demeurent inférieures à la précision des

déterminations. Il n'y a donc pas d'inconvénient de principe à supposer connue la valeur osculatrice du demi-grand axe. Les autres éléments déterminés seront des valeurs osculatrices à une précision suffisante.

TABLEAU X.

« Écho I », passage du 10 juillet 1962 à Meudon, à 21 h 59 m 38 s.

Valeur imposée au demi-grand axe (km).	e (rad).	i (rad).	Ω (rad).	ω (rad).	M (rad).
7 883,053	0,040 687	0,824 812	3,408 890	5,553 200	1,980 200
7 883,100	0,040 781	0,824 828	3,408 918	5,554 223	1,979 014
7 883,120	0,040 777	0,824 828	3,408 920	5,554 248	1,978 994
7 883,180	0,040 775	0,824 828	3,408 920	5,554 417	1,978 823

Résultats numériques. — En application de cette méthode nous avons fait les calculs suivants :

1° D'abord nous avons calculé les éléments orbitaux avec des observations s'étendant sur deux révolutions successives. Dans le tableau XI se trouve indiquée la valeur des éléments osculateurs corrigés des termes à courte période avec leur intervalle de confiance calculé comme il a été dit au chapitre précédent (loi de Student). La courbe (fig. 8) donne la valeur du demi-grand axe à un instant quelconque par simple interpolation.

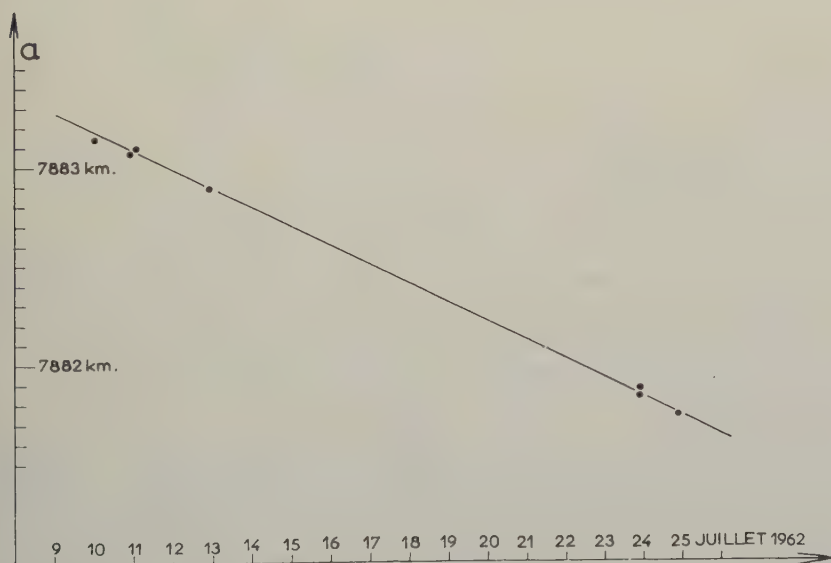


Fig. 8. — Demi-grand axe moyen instantané en fonction du temps (Écho I).

TABLEAU XI.

Date.	T. (s.)	a (km.)	e. ^p (m.)	e (rad.)	e. ^p (10 ⁻³ rad.)	i (rad.)	e. ^p (10 ⁻⁶ rad.)	Ω (rad.)	e. ^p (10 ⁻³ rad.)	ω (rad.)	e. ^p (10 ⁻⁴ rad.)	M (rad.)	e. ^p (10 ⁻⁴ rad.)
1962 :													
9 juill....	85 743	7 883,141	11	0,040 366	7,6	0,824 778	4,7	3,460 99	3,4	5,494 1	3,8	5,358 2	4,3
10 »	79 178	7 883,068	6	0,040 728	1,5	0,824 808	2,8	3,408 88	1,6	5,553 6	3,1	1,979 8	3,4
10 »	86 557	7 883,092	5	0,040 707	1,8	0,824 802	2,6	3,404 10	1,5	5,557 8	5,1	2,354 6	5,5
12 »	80 626	7 882,894	10	0,041 162	17,1	0,824 856	4,8	3,924 91	5,9	5,680 5	28,7	2 098 0	32,6
23 »	80 493	7 881,858	7	0,042 664	4,7	0,824 829	11,0	2,673 71	4,8	1,379 6	3,1	4,912 6	3,4
23 »	80 441	7 881,842	20	0,041 986	18,3	0,824 695	35,1	2,674 33	16,7	1,356 0	7,6	4,868 9	9,5
24 »	77 550	7 881,741	8	0,043 281	8,0	0,824 849	18,0	2,618 88	6,1	2,075 34	5,2	4,812 65	7,2

TABLEAU XII.

Valeurs imposées.

Date.	T. (s.)	a (km.)	e (rad.)	e. ^p (10 ⁻⁶ rad.)	i (rad.)	e. ^p (10 ⁻⁶ rad.)	Ω (rad.)	e. ^p (10 ⁻³ rad.)	ω (rad.)	e. ^p (10 ⁻⁴ rad.)	M (rad.)	e. ^p (10 ⁻⁴ rad.)	σ.
1962 :													
8 juill....	1 730	{ 7 879,098 7 883,320	{ 0,040 107 0,039 918	{ 2,2 9,5	{ 0,824 478 0,824 733	{ 2,3 33,1	{ 3,572 49 3,572 53	{ 3,2 9,4	{ 5,373 98 5,377 99	{ 5,8 4,2	{ 2,419 10 2,415 04	{ 6,1 5,1	{ 4,99 3,42
8 »	77 776	{ 7 880,477 7 883,250	{ 0,040 169 0,040 272	{ 9,5 3,3	{ 0,824 612 0,824 771	{ 33,1 4,4	{ 3,522 99 3,458 76	{ 9,4 6,8	{ 5,427 71 5,490 64	{ 4,2 12,5	{ 1,906 18 1,903 40	{ 5,1 13,1	{ 3,42 5,65
10 »	2 892	{ 7 878,889 7 883,140	{ 0,040 541 0,040 376	{ 3,3 4,1	{ 0,824 518 0,824 772	{ 4,4 8,5	{ 3,458 81 3,408 98	{ 6,4 7,0	{ 5,495 29 5,553 22	{ 13,6 13,3	{ 2,282 74 1,980 24	{ 4,1 13,9	{ 5,35 6,95
10 »	79 178	{ 7 879,222 7 883,053	{ 0,040 698 0,040 687	{ 4,1 3,8	{ 0,824 587 0,824 812	{ 8,5 7,6	{ 3,408 89 3,403 99	{ 6,4 7,0	{ 5,553 22 5,555 31	{ 13,6 13,3	{ 2,282 74 1,980 24	{ 4,1 13,9	{ 5,35 6,95
10 »	86 557	{ 7 878,945 7 883,070	{ 0,040 948 0,040 744	{ 3,8 3,4	{ 0,824 552 0,824 802	{ 7,6 32,3	{ 3,403 99 3,398 96	{ 7,0 11,6	{ 5,555 31 5,568 17	{ 13,3 25,7	{ 2,357 07 2,353 86	{ 13,9 26,8	{ 6,95 5,31
11 »	7 413	{ 7 879,923 7 883,060	{ 0,041 030 0,040 853	{ 3,4 4,1	{ 0,824 646 0,824 837	{ 32,3 28,5	{ 3,398 96 3,344 44	{ 11,6 9,6	{ 5,569 26 5,626 31	{ 25,7 28,3	{ 2,610 66 2,611 83	{ 26,8 29,6	{ 5,31 6,28
12 »	4 524	{ 7 882,868 7 882,980	{ 0,041 179 0,041 001	{ 4,1 8,7	{ 0,824 641 0,824 830	{ 28,5 4,8	{ 3,344 44 3,344 72	{ 9,6 14,2	{ 5,626 31 5,625 37	{ 28,3 15,5	{ 2,555 47 2,556 48	{ 29,6 16,6	{ 6,28 8,22
12 »	80 626	{ 7 878,596 7 882,900	{ 0,041 196 0,041 059	{ 8,7 3,8	{ 0,824 603 0,824 860	{ 4,8 17,4	{ 3,294 93 3,295 00	{ 14,2 8,2	{ 5,673 30 5,685 11	{ 15,5 14,3	{ 2,105 39 2,284 38	{ 16,6 15,1	{ 8,22 7,28
14 »	82 141	{ 7 879,179 7 882,720	{ 0,041 473 0,041 056	{ 3,8 9,5	{ 0,824 689 0,824 830	{ 17,4 3,8	{ 3,180 77 3,181 03	{ 8,2 15,1	{ 5,805 11 5,806 46	{ 14,3 15,1	{ 2,284 38 2,283 07	{ 15,1 15,1	{ 7,28 7,28

Les conditions météorologiques peu favorables n'ont permis que quelques déterminations de α . L'activité solaire n'a subi aucune fluctuation importante durant cette période. L'altitude du périégée a peu baissé, quelques kilomètres, et les conditions d'ensoleillement ont peu varié. Une loi linéaire empirique représente bien les valeurs observées et se trouve être très proche de la loi théorique.

2° Ensuite, nous avons calculé la valeur des éléments osculateurs déduits d'un seul passage comprenant deux clichés photographiques (tableau XII). Dans le tableau se trouvent également la valeur de ces éléments corrigés des termes à courte période, l'erreur quadratique moyenne des observations, et les erreurs probables des éléments. Le demi-grand axe a été déduit de la courbe (fig. 8).

Pour juger de la précision, les valeurs des éléments, excentricité et inclinaison ont été portées sur les courbes (fig. 9 et 10). Les courbes en

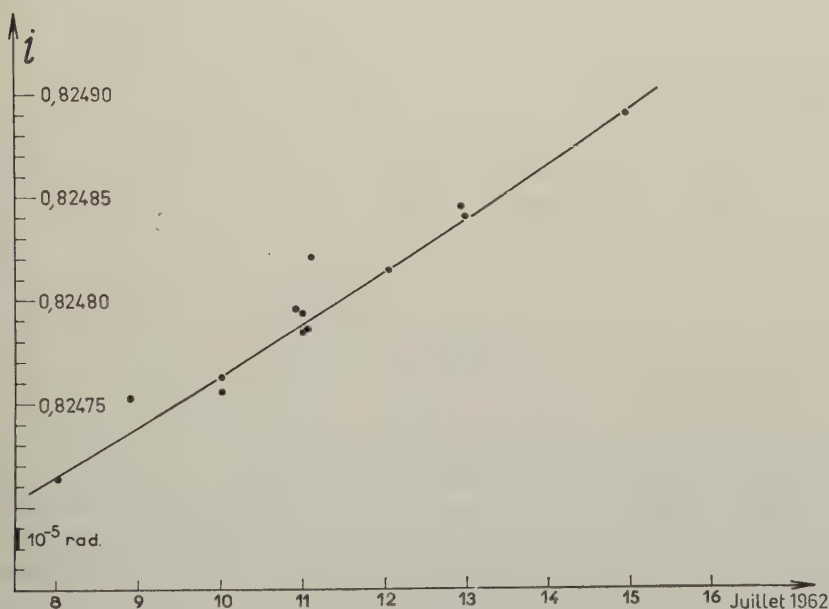


Fig. 9. — Inclinaison.

Comparaison entre la théorie et l'observation des variations de l'inclinaison « moyenne instantanée » en fonction du temps (*Écho I*).

trait plein ne sont pas des courbes empiriques passant au travers des valeurs de manière à rendre minimaux les écarts à cette courbe. Ce sont des courbes d'évolution théorique calculées par intégration numérique. Tous les effets des principales perturbations y ont été inclus. Seule l'origine a été ajustée de manière à faire passer la courbe parmi les points observés. La valeur de ces écarts est à notre avis le meilleur critère

de précision qu'on puisse trouver. Ce critère ne résulte pas de l'accord interne des résultats. On voit qu'en général la courbe théorique passe par un point intérieur à l'intervalle de confiance. Il existe peu de cas où il n'en soit pas ainsi; l'étude des erreurs systématiques montre que ces points s'en écartent d'une quantité toujours admissible.

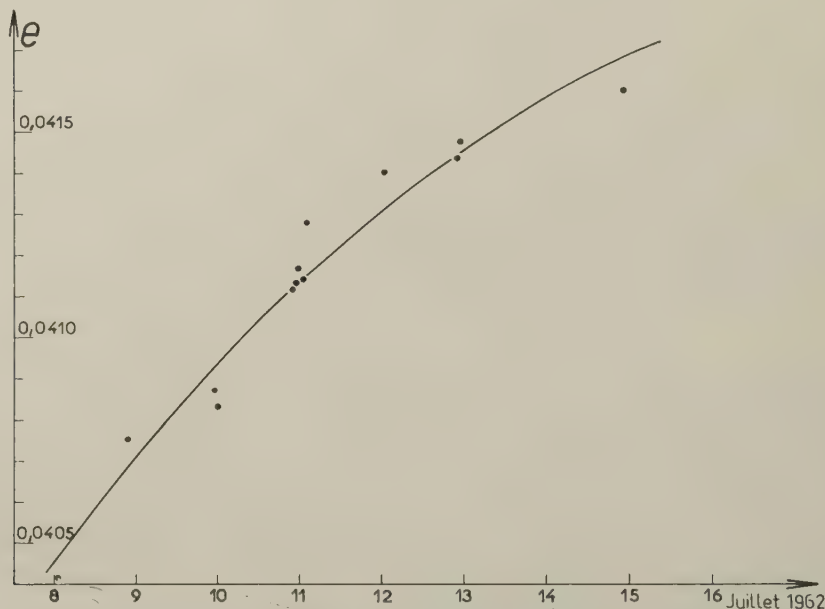


Fig. 10. — Excentricité.
Comparaison entre la théorie et l'observation des variations
de l'excentricité « moyenne instantanée » en fonction du temps (*Écho I*).

Il faut signaler aussi que l'écart quadratique moyen des observations est plus important lorsqu'on utilise des observations faites sur une révolution entière. Nous interprétons encore ce résultat comme l'effet d'erreurs systématiques entre les différents clichés. L'origine possible de ces erreurs a déjà été étudiée, erreur de mesure, erreur de phase, erreur de réduction. Les différences entre ces écarts quadratiques ne sont pas suffisamment grandes ($2''$) pour ne pouvoir s'interpréter avec l'aide de ces hypothèses. S'il n'en était pas ainsi, il faudrait discuter de nouveau la valeur du modèle du champ de forces.

Ajoutons enfin que la moyenne algébrique des résidus n'est pas toujours nulle séparément en α et en δ . Elle l'est seulement globalement comme cela doit être.

Les observations utilisées ici ont une précision comprise entre 4 et $5''$. Depuis, des progrès très sensibles ont été réalisés à l'observatoire de Meudon [52]; avec la qualité des observations faites actuellement, tout ce que nous avons dit serait *a fortiori* plus valable encore.

CHAPITRE III.

UTILISATION DES ÉLÉMENTS OSCULATEURS.

Nous développons, dans ce troisième chapitre, des exemples d'application des éléments osculateurs calculés précédemment. L'observation des variations des éléments au cours du temps permet d'en déterminer les causes et de les étudier. Il faut soigneusement distinguer les différentes périodes de variation des éléments orbitaux : celles qui sont de l'ordre de la durée de révolution du satellite ou de celle de la Terre, celles qui sont de l'ordre de la durée de révolution du périégée, enfin celles qui sont infinies (termes séculaires). Chacune débouche sur des études de nature différente. Ainsi, l'étude des variations des termes à courte période doit permettre des études fines du potentiel terrestre, tandis que les termes séculaires et à longue période permettent de définir les propriétés moyennes de ce potentiel. Nous avons donc divisé ce troisième chapitre en deux sections principales : l'une traitant de l'utilisation des termes à courte période, l'autre de l'utilisation des termes séculaires et à longue période. Les termes séculaires conduisent à des applications légèrement différentes de celles des termes à longue période. Les premiers permettent de déterminer les harmoniques pairs du potentiel terrestre, les seconds les harmoniques impairs; mais il faut les traiter ensemble.

1. Observation des termes à courte période. — Nous ne traitons pas ici le problème général de la recherche des termes à courte période, étant donné son ampleur et ses difficultés. Cependant, comme cette étude est une des conséquences les plus logiques de notre travail, nous en traitons un exemple pour nous assurer que l'emploi des éléments osculateurs permet une telle recherche. Certes, les calculs d'erreurs que nous avons faits nous donnent la précision avec laquelle nous pouvons déterminer tel ou tel paramètre et, par conséquent, quelles variations éventuelles, à courte période, nous pouvons détecter. Mais nous avons tenu à utiliser un autre moyen de contrôle. Nous avons cherché à mettre en évidence les variations des termes à courte période sous l'effet de l'aplatissement terrestre. La vérification de la théorie, qui n'a encore jamais été apportée à notre connaissance, nous a paru très intéressante pour elle-même.

Dans l'exemple numérique choisi, nous avons utilisé uniquement des observations faites à partir d'une seule station : celle de Meudon. Les observations de Strasbourg n'étaient pas assez nombreuses pour ce but. Les positions obtenues par les stations Baker-Nunn américaines et qui nous ont été très aimablement envoyées par le Smithsonian Observatory n'ont pu être utilisées car les résultats envoyés correspondaient à une réduction préliminaire à 1' près.

Calculs. — D'après les observations obtenues à partir de chaque cliché, nous avons calculé les éléments osculateurs correspondants en supposant le demi-grand axe connu. De façon à ne faire aucune hypothèse sur la nature du phénomène que nous voulions observer, nous avons supposé dans une première étape le mouvement képlérien. L'arc géocentrique correspondant à un cliché étant trop petit pour obtenir les éléments avec précision, nous avons ajouté un point d'observation appartenant, soit au cliché suivant, soit au cliché précédent, pour que l'arc soit au moins d'une dizaine de degrés. Par passage nous avons donc calculé deux groupes d'éléments osculateurs, un premier correspondant à une époque t_1 , instant milieu du premier cliché, un deuxième à une époque t_2 , instant milieu du deuxième cliché. Dans une deuxième étape du calcul, nous avons calculé les éléments orbitaux en utilisant toutes les observations du passage, le demi-grand axe étant toujours connu, mais en tenant compte cette fois de l'aplatissement terrestre. A partir de ces derniers éléments, nous avons pu calculer les variations théoriques des éléments osculateurs des époques t_1 et t_2 , (théorie de Brouwer). Le tableau XIII rassemble les résultats. On a donné côte à côte, les variations observées et les variations théoriques calculées. Les erreurs sur l'excentricité sont comprises entre 1 et $2 \cdot 10^{-4}$ rad, celles sur l'inclinaison entre 10^{-8} et $5 \cdot 10^{-6}$ rad. Chaque fois que la variation théorique est supérieure aux erreurs probables, on observe une variation conforme au sens prévu par la théorie, mais le phénomène est de petite amplitude et reste difficile à mettre en évidence.

TABLEAU XIII.

N ^{os} des clichés.	Δe obs. (rad).	Δe théor. (rad).	Δi obs. (rad).	Δi théor. (rad).
53-54.....	$20 \cdot 10^{-8}$	$16 \cdot 10^{-8}$	$00 \cdot 10^{-6}$	$-01 \cdot 10^{-6}$
57-58.....	24 »	2 »	14 »	6 »
59-60.....	41 »	22 »	— 3 »	— 7 »
62-63.....	— 4 »	8 »	2 »	4 »
64-65.....	12 »	12 »	14 »	6 »
73-75.....	— 3 »	7 »	— 3 »	4 »

Nous avons fait alors un autre calcul, ayant pu observer plusieurs révolutions successives. A cause de la rotation de la Terre, l'observateur voit en effet à chaque révolution un arc légèrement différent. Nous avons profité de cette situation, pour mettre en évidence les variations des termes à courte période en calculant les éléments osculateurs sur chaque révolution. Seul le demi-grand axe est supposé connu, comme précédemment, mais ce qui est un avantage par rapport au calcul précédent, les éléments sont calculés en utilisant entièrement l'arc observé, c'est-à-dire les observations faites avec deux clichés photographiques et non plus un seul. Nous donnons dans le tableau XIV la valeur des éléments

osculateurs pour e et i et la valeur corrigée des termes à longue et à courte période e'' et i'' , d'après la théorie développée par Brouwer. Si la seule perturbation existante était l'aplatissement terrestre, e'' et i'' seraient rigoureusement constants. Ceci n'est pas tout à fait exact à cause de l'existence des autres perturbations, mais celles-ci sont très faibles sur cette courte durée. A la précision des déterminations, on peut dire que les éléments moyens sont constants, conformément à la théorie.

TABLEAU XIV.

« *Écho I* », passage du 10 juillet 1962, à Meudon.

	e (rad).	e'' (rad).	i (rad).	i'' (rad).	M'' (rad).
1 ^{re} révolution.....	0,040 697	0,041 115	0,824 587	0,824 796	1,991 32
2 ^e »	0,040 930	0,041 152	0,824 550	0,824 783	2,364 98
3 ^e »	0,040 994	0,041 238	0,824 642	0,824 817	2,623 02

Nous avons conduit enfin, un dernier calcul similaire en utilisant des observations faites à Organ Pass sur 1961 δ_1 à l'aide d'une caméra Baker-Nunn (¹). Nous désirions étudier le même phénomène, mais avec des positions sensiblement plus précises [66]. L'erreur quadratique moyenne est de 1'',5 contre 5'' de degré pour les premières utilisées. L'arc de trajectoire est d'une trentaine de degrés géocentriques. Les observations sont faites de façon continue.

Nous avons divisé l'arc en quatre parties se recouvrant deux à deux et couvrant chacune au moins une dizaine de degrés géocentriques. Comme dans le tableau XIV, nous donnons côte à côte dans le tableau XV, la valeur des éléments osculateurs pour e et i et la valeur corrigée des termes à courte période et à longue période e'' et i'' . Étant donné la longueur de l'arc de trajectoire, la valeur des éléments moyens instantanés est constante, aux erreurs d'observation près, 2.10^{-3} rad pour l'excentricité et 3.10^{-6} rad pour l'inclinaison. La théorie est donc vérifiée.

TABLEAU XV.

M (deg).	e (rad).	e'' (rad).	i (rad).	i'' (rad).
196.....	0,112 82	0,113 42	0,677 762	0,677 912
204.....	0,112 78	0,113 40	0,677 771	0,677 913
210.,.....	0,112 76	0,113 40	0,677 784	0,677 912
224.....	0,112 74	0,113 44	0,677 847	0,677 916

Conclusion. — Nous avons pu observer les effets à courte période, et il nous paraît souhaitable de souligner ici l'intérêt des recommandations déjà faites par J. Kovalevsky [9]. Il est intéressant de faire des observa-

(¹) Cette partie du travail a été faite en collaboration avec J. M. Triplet, que nous remercions ici.

tions à une même latitude et à des longitudes différentes pour suivre l'évolution d'un terme de révolution en révolution et découvrir tout effet important de 12 ou 24 h de période quelle qu'en soit l'origine. En se plaçant à une même latitude, on élimine les effets à courte période dépendant de la latitude et l'analyse se trouve simplifiée. Il est toujours rationnel d'analyser l'effet de chaque paramètre en annulant ou en minimisant l'effet des autres paramètres. Inversement, on cherchera à faire des observations à une même longitude mais à des latitudes différentes.

Le développement de ces techniques devrait servir les idées qui commencent à se développer aujourd'hui comme celles d'Arnold [53]. Arnold cherche à découper par la pensée la Terre en grands carrés, et à déterminer pour chaque carré les anomalies locales par rapport à un potentiel de référence. Il ne faut cependant pas oublier que la Terre est recouverte aux trois quarts par les eaux, alors que l'exploitation systématique des mesures photographiques de haute précision nécessite des stations de mesure au sol. On doit tenir compte aussi de l'implantation réelle des stations, qui pour des raisons sociales, économiques et météorologiques ne peuvent être installées n'importe où. Les spécialistes de l'observation devront s'adapter à ces réalités et ne pas négliger les autres types de mesures (gravimétrie en mer, par exemple), s'ils veulent poursuivre des études précises sur le potentiel terrestre. Mais il nous paraît certain que la détermination des éléments osculateurs devra apporter une contribution précieuse dans ce domaine.

2. Détermination des harmoniques du potentiel terrestre par l'étude des termes séculaires et à longue période. — Faisons d'abord quelques remarques et précisons comment calculer l'effet des différentes perturbations : frottement atmosphérique, pression de radiation solaire, action gravitationnelle luni-solaire. Nous pourrons ensuite, de façon plus fructueuse, indiquer comment calculer la somme des différents effets perturbateurs et discuter de l'intérêt de ce procédé. L'exemple numérique permettra de calculer J_2 et J_3 .

Remarques. — On peut se demander en premier lieu si l'emploi des éléments osculateurs pour le but proposé permet une bonne utilisation de la précision intrinsèque des observations. En effet, l'arc de trajectoire étant relativement court, les éléments orbitaux sont déterminés avec une précision moindre que par les autres méthodes utilisant des observations sur plusieurs révolutions. Cela est vrai en théorie, cela l'est moins dans la réalité physique. Il faut rappeler en effet que, si dans des conditions idéales, la précision avec laquelle on détermine les éléments orbitaux augmente avec la longueur de l'arc utilisé, elle tend vite de façon asymptotique vers une limite qui est déjà presque atteinte sur un arc d'une vingtaine de degrés géocentriques sauf pour certains éléments comme

l'excentricité et l'argument du périhélie. Au surplus, comme nous l'avons déjà développé dans le chapitre précédent, la précision avec laquelle on détermine les éléments orbitaux en utilisant plusieurs révolutions ne doit pas faire trop illusion. Les modèles de champ de forces ne sont pas encore bien connus surtout en ce qui concerne les anomalies locales du potentiel. Les positions des stations devront encore être améliorées.

Tout cela limite la valeur des éléments orbitaux sans même faire intervenir la question de la précision des observations elle-même. Notre assertion se vérifie en regardant l'écart quadratique des observations par rapport à la trajectoire, lorsqu'elle est définie sur plusieurs révolutions. Cet écart n'atteint pas en moyenne la valeur déduite de la précision intrinsèque des observations de K. Lassovszky [56], G. Veis [60].

ÉTUDES PRÉLIMINAIRES.

LE FROTTEMENT ATMOSPHÉRIQUE. — Généralités. — Une des principales caractéristiques du frottement atmosphérique est de subir des variations relatives très importantes dans le temps et l'espace. Le frottement atmosphérique dépend essentiellement de l'altitude du satellite et des différents facteurs suivants : l'angle horaire du Soleil, le rayonnement ultraviolet solaire et le flux corpusculaire en provenance du Soleil. Ces facteurs sont en corrélation très étroite avec l'heure de la journée, le flux solaire sur onde décimétrique et l'indice géomagnétique, quantités qui remplissent les fonctions d'indicateurs. Dans la périodicité des variations des paramètres, on retrouve naturellement celle des indicateurs : le jour, la rotation du Soleil, la demi-année, le cycle solaire; les densités suivent elles aussi des variations parallèles. Comme première conséquence, nous renoncerons à représenter de façon immuable les variations des paramètres atmosphériques, puisque le rayonnement ultraviolet et le flux corpusculaire solaire subissent des variations imprévisibles. On adoptera un modèle conventionnel d'atmosphère relativement simple et il restera à déterminer les écarts à ce modèle.

Choix du modèle. — Un modèle doit permettre de calculer en tout lieu et à tout instant la valeur des paramètres atmosphériques, en particulier celle de la densité. Il doit serrer la réalité du plus près possible. Il n'est pas question, en effet, de déterminer la densité en tout point. Seules les jauges qui sillonnent l'espace dans les satellites nous fournissent des renseignements continus, mais le volume d'atmosphère traversé reste minime par rapport à tout l'espace. On est donc obligé d'admettre une loi de variation de la densité en fonction des différents facteurs, et la valeur des densités déterminées, aussi bien que la valeur des effets du frottement atmosphérique sur le mouvement du satellite seront intimement liées au choix du modèle. Ces modèles ont été définis par approximations successives grâce aux travaux de Jacchia [38], [39], King-Hele [42],

Paetzold [41] et beaucoup d'autres. Ces modèles peuvent être considérés comme valables aujourd'hui. Il nous faut surtout un modèle définissant les propriétés de l'atmosphère jusqu'à 1500 km et tenant compte des effets à courte période (effet jour-nuit), puisque nous nous intéressons aux études fines de la trajectoire. Nous avons donc adopté les modèles de Harris-Priester [40]. Les paramètres sont l'altitude, l'heure locale et le flux solaire moyen mensuel sur onde décimétrique. Les densités sont données de 20 en 20 km; nous les avons interpolées suivant une loi de type exponentiel. Nous tenons compte de la rotation de l'atmosphère entraînée avec la Terre. L'altitude est comptée à partir de l'ellipsoïde terrestre qui sert de référence.

Calcul des variations des éléments orbitaux. — Hypothèses : Nous supposons que le satellite est soumis à une accélération de la forme

$$- \rho C_d \frac{S}{2m} v^2,$$

ρ est la densité, C_d un coefficient aérodynamique égal à 2 environ, $\frac{S}{m}$ le quotient de la section de choc par la masse, v la vitesse du satellite par rapport à l'air. Nous ne considérons que les échanges de quantités de mouvement entre les molécules (ou les ions) et le satellite et nous négligeons les interactions électriques. D'après Shapiro [34], cela est entièrement légitime sauf peut-être dans le cas de petites aiguilles de cuivre par exemple (projet West-Ford). Il est aussi légitime d'après Shapiro de négliger l'influence des chocs des micrométéorites.

Le calcul des variations des éléments orbitaux a été abordé par plusieurs auteurs. Brouwer a donné une solution analytique de ce problème par la méthode de von Zeipel [35]; très intéressante sur le plan de la mécanique céleste, elle n'a pas d'application pratique, car le modèle est trop éloigné de la réalité. Davies [36] et King-Hele en ont donné une autre solution en partant des équations de Lagrange. Ils ont développé la solution à l'aide des fonctions de Bessel et le modèle d'atmosphère est satisfaisant. Iszak [37] a aussi donné une solution analytique permettant de calculer les termes à courte période. Mais finalement nous avons préféré une solution purement numérique, car elle permet le calcul des termes à courte période et l'utilisation d'un modèle d'atmosphère tabulé qui donne toujours plus de souplesse dans le choix même de ce modèle. Un modèle tabulé peut résulter d'une forme analytique très complexe sans que le calcul soit, lui, plus compliqué. Nous avons donc intégré numériquement les équations de Lagrange [19, n° 85] en utilisant la méthode des trapèzes. L'intégration se fait révolution par révolution. On considère les éléments orbitaux au second membre des équations comme constants sur un tour, mais l'effet sur l'anomalie moyenne est calculé comme il se doit après celui du demi-grand axe.

Il n'y a pas de difficulté pratique à tenir compte des variations des éléments au second membre, en particulier de celles dues à l'aplatissement terrestre, mais il faut que ce raffinement ne soit pas illusoire compte tenu des approximations plus ou moins importantes que nous sommes obligés de faire par ailleurs (forme de la loi d'accélération, modèle d'atmosphère, coefficient aérodynamique C_d et quotient section de choc sur masse connus à quelques pour-cent près). Nous pouvons d'ailleurs estimer approximativement l'erreur commise en négligeant le mouvement du périhélie. Celui-ci est de l'ordre de $0,3$ sur une révolution, tandis que l'arc pour lequel le frottement est efficace s'étend sur environ 60° de part et d'autre du périhélie. L'erreur commise est donc dans le rapport de $0,3/120$, soit $1/400$, ce qui est très petit. La valeur numérique des éléments orbitaux figurant au second membre est déterminée d'après les observations. Le pas d'intégration est le degré, et tous les 10 degrés, nous avons prévu de calculer les valeurs intermédiaires pour étudier les termes à courte période.

Détermination des écarts au modèle. — Si l'on calcule les variations théoriques des éléments orbitaux sous l'influence du frottement atmosphérique, on constate un écart entre les valeurs observées et les valeurs calculées; ceci est normal. Nous admettrons qu'il faut multiplier toutes les densités du modèle par un même coefficient. Ce coefficient est indépendant des points de l'espace traversé par le satellite et de la durée nécessaire à la mesure des variations des éléments orbitaux. D'après la forme théorique des équations de Lagrange, les variations des éléments orbitaux seront multipliées par un même coefficient, coefficient déterminé pour rendre aussi petits que possible les écarts entre les variations calculées et celles observées. Il faut rappeler qu'étant donné le type de loi de décroissance de la densité, type exponentiel, la densité au périhélie joue un rôle déterminant dans ce calcul et c'est pourquoi l'on considère que ce calcul est en fait une détermination de la densité au périhélie. Nous avons donné dans les figures 2 à 7 les variations des éléments orbitaux sur une révolution.

LA PRESSION DE RADIATION SOLAIRE. — Dans l'étude de la pression de radiation solaire, il faut distinguer d'abord l'action exercée par le rayonnement en provenance directe du Soleil et celle exercée par le rayonnement émis, réfléchi, ou diffusé par la surface terrestre et les couches atmosphériques intermédiaires. Nous nous intéressons en premier lieu au flux solaire qui frappe directement le satellite.

Pression de radiation par le flux solaire en provenance directe du Soleil. — Sous l'effet du flux de rayonnement F , un élément dS de surface est soumis à une pression (fig. 11)

$$P = e(1 + \rho) \cos^2 \varphi,$$

$$P_1 = e(1 - \rho) \sin^2 \varphi,$$

ρ , Pouvoir réflecteur;

e , Densité d'énergie rayonnante.

Pour déterminer la pression résultante, il faut décomposer la surface en petits éléments et intégrer l'action sur toute cette surface.

L'effet de la pression de radiation dépendra essentiellement de la forme du satellite, du pouvoir réflecteur et de la position de chaque élément de surface par rapport au flux solaire à tout instant, c'est-à-dire du mouvement du satellite autour de son centre de gravité. Le problème peut parfois être très difficile sinon impossible à résoudre, lorsque le mouvement du corps autour de son centre de gravité n'est pas bien connu. Dans le cas qui nous intéresse (*Écho I*), le problème est relativement simple puisque le satellite est sphérique, si toutefois il n'est pas trop dégonflé; nous avons pu observer des variations d'éclat de plusieurs magnitudes. Il faut donc s'attendre à des difficultés dans la comparaison

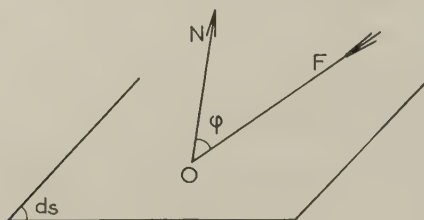


Fig. 11.

à longue échéance de la théorie à l'observation et les travaux de Shapiro [44] et Wyatt qui se sont attachés à étudier les formes les plus simples de satellite (disque, cylindre, sphère) doivent nous servir de mise en garde. Ainsi Shapiro a montré que, dans le cas d'un disque en rotation, l'effet de la pression de radiation sur le demi-grand axe de l'orbite pouvait changer de signe en fonction de la position de l'axe de rotation. D'après nos études, il reste néanmoins vrai que le modèle sphérique est celui qui permet la meilleure représentation du mouvement d'*Écho I*, même si à long terme elle n'est plus totalement satisfaisante. Sur une durée de sept jours, nous obtenons une représentation presque parfaite des variations des éléments orbitaux inclinaison et excentricité en particulier (fig. 9 et 10), en supposant *Écho I* sphérique avec le rapport théorique de la section de choc à la masse égal à 115 C. G. S.

Hypothèses de calcul. — Le satellite est soumis à une accélération parallèle au flux solaire et égale à

$$\frac{\pi r^2}{m} e,$$

r est le rayon du satellite sphérique;

e est la densité d'énergie rayonnante, quantité égale au rapport de la constante solaire à la vitesse de la lumière,

$$e = 4/9 \cdot 10^{-4} \text{ C. G. S.}$$

Nous pouvons supposer que la constante solaire ne varie pas au cours du temps et négliger les variations de la distance du Soleil à la Terre; nous supposons en outre que l'accélération constante sur une révolution est parallèle à l'axe Soleil centre-Terre. Cette dernière approximation est tout à fait valable pour un satellite proche, étant donné la petitesse du rapport des distances satellite-centre Terre et Soleil-centre Terre, qui est inférieur à 10^{-4} .

Calcul des variations des éléments orbitaux. — Ferraz-Mello ([45], [46]) a donné une solution analytique très intéressante du problème. Les solutions numériques ou semi-analytiques proposées avant lui par plusieurs auteurs (Musen [47], Kozai [48]), pour intéressantes qu'elles soient, sont seulement valables pour un satellite toujours éclairé, ou alors, nécessitent le calcul numérique révolution après révolution des entrées et des sorties de l'ombre; celle de Ferraz-Mello est valable même lorsque le satellite entre et sort de l'ombre de la Terre. Mais le développement n'est pas convergent pour toutes les valeurs de l'excentricité et une difficulté demeure lorsque cette dernière s'annule. D'autre part, Ferraz-Mello n'a pas calculé les termes à courte période. Pour ces raisons et pour généraliser, nous avons adopté une méthode purement numérique. Les entrées et les sorties de l'ombre se calculent en écrivant qu'une quantité est positive quand le satellite est éclairé et négative dans le cas contraire, (Shapiro [57]). Les équations qui servent de départ au calcul des variations des éléments orbitaux sont ici encore les équations de Lagrange. L'intégration étant numérique, nous avons pu procéder de la même façon que pour le frottement atmosphérique. Nous avons utilisé les expressions analytiques de Kozai [48] dans le calcul des projections de la force perturbatrice suivant le rayon vecteur, selon la direction perpendiculaire dans le plan de l'orbite et selon la direction normale au plan de l'orbite. Nous avons donné dans les figures 2 à 7 les variations des éléments orbitaux sur une révolution sous l'effet de la pression solaire directe. Nous avons comparé les résultats que nous avons trouvés sur une révolution avec ceux obtenus d'après les formules de Kozai [48] et de Shapiro [34]. L'accord est bon.

ÉTUDE DE L'INFLUENCE DU RAYONNEMENT, ÉMIS, RÉFLÉCHI OU DIFFUSÉ PAR LA TERRE. — Les études de Ladislav Sehnal [24] montrent déjà que cet effet n'est pas négligeable pour un satellite comme *Écho I*.

Le satellite étant très proche de la Terre, l'influence de ce rayonnement dépend pour une part des conditions géophysiques locales. Il faut souligner les difficultés à traiter ce problème avec une rigueur mathématique absolue. L'albédo de la Terre est connu seulement en moyenne, le pouvoir réflecteur de l'océan, des terres et des couches nuageuses est difficile à estimer localement; il est compliqué de tenir compte en détail des régions géographiques survolées, de distinguer les régions aperçues du satellite

dont une partie est éclairée, l'autre dans l'ombre, etc. Enfin le rayonnement infrarouge de la Terre varie entre le jour et la nuit, avec la latitude. Heureusement, les effets de ce type de rayonnement sont petits, l'étude le confirme; on ne peut mettre en évidence que des effets moyens sur un grand nombre de révolutions. Dans ces conditions, le satellite survole tous les types de surface, océans, couches nuageuses et il est légitime d'étudier le phénomène avec une Terre dont les propriétés seront « moyennes » ou obéiront à des lois simples fonctions de la longitude et de la latitude, par exemple; S. P. Wyatt [43] a procédé ainsi. Il a étudié toute une série de modèles se compliquant de plus en plus et s'approchant autant que possible de la réalité. Ses conclusions sont les suivantes. Le rayonnement infrarouge émis par la Terre et la lumière réfléchie par la Terre causent des effets beaucoup plus petits que le rayonnement diffusé. Le rayonnement infrarouge soumet le satellite à une accélération radiale du centre de la Terre, inversement proportionnelle au carré de la distance, se confondant donc dans ses effets avec la gravitation. La quantité du rayonnement réfléchi au sens strict du terme est très petite. Le pouvoir réflecteur des terres est très faible et, du fait des vagues, la surface des océans ne peut être considérée comme une bonne surface réfléchissante. Seuls les lacs peuvent jouer un rôle, ils couvrent une toute petite surface. L'influence du rayonnement diffusé est prépondérante. Wyatt suppose une loi de diffusion de la forme $(1 - \cos Z_{\odot})^2$ ($Z_{\odot}$ étant la distance zénithale du Soleil), plutôt que la loi théorique de Lambert, car elle rend mieux compte des mesures de la lumière terrestre rayonnée par la Lune. Toutes ces hypothèses apparaissent valables et nous avons utilisé les formules données par Wyatt [43]. Nous trouvons ainsi que, par révolution, les variations de l'excentricité sont de l'ordre de $5 \cdot 10^{-7}$ pour la période du 7 au 15 juillet 1962. La variation du demi-grand axe est de l'ordre de $4 \cdot 10^{-4}$ km. Nous ne pouvons pas affirmer que nous ayons mis en évidence l'influence de la pression solaire diffusée par la Terre, mais nous pouvons dire que, lorsque nous tenons compte de cet effet, nous obtenons une meilleure représentation théorique des observations. Ainsi l'observation donne une valeur de l'excentricité égale à $0,04158 \pm 4 \cdot 10^{-5}$ pour le 14 juillet 1962; la théorie donne 0,04167 avec un modèle de diffusion et 0,04172 sans modèle de diffusion. L'effet ne dépasse jamais 10 à 15 % de l'effet de la pression solaire directe.

EFFETS LUNI-SOLAIRES. — Nous étudierons seulement l'action de la Lune puisque celle du Soleil se traite de la même façon. Dans le système d'axes que nous avons choisi, l'accélération du satellite peut se mettre sous la forme suivante (fig. 12) :

$$\frac{d^2 \vec{TS}}{dt^2} = km' \frac{\vec{SL}}{r'^3} - km' \frac{\vec{TL}}{r'^3} + F.$$

Les deux premiers termes du second membre représentent l'action de la Lune, $\frac{km' \overrightarrow{TL}}{r'^3}$ est l'accélération d'entraînement du centre du système de référence, F représente l'ensemble de toutes les autres forces, m' est la masse de la Lune, r' la distance Terre-Lune, r'' la distance Lune-Satellite. La perturbation lunaire dépend d'une fonction de force R_1 (Danjon [14, n° 112]) égale à

$$(2) \quad R_1 = km' \left(\frac{1}{r''} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \right),$$

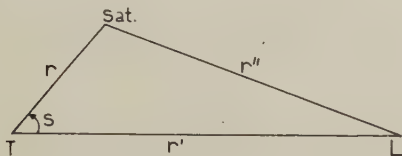


Fig. 12.

x, y, z représentent les coordonnées du satellite; x', y', z' celles de la Lune. En développant cette fonction par rapport à la quantité $\frac{r''}{r'}$ et en négligeant $\left(\frac{r''}{r'}\right)^3$, on trouve

$$(3) \quad R_2 = \frac{km'}{r'} + km' \frac{r^2}{r'^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 S - \frac{1}{2} \right),$$

S est l'angle $(\overrightarrow{TS}, \overrightarrow{TL})$.

Le premier terme ne dépend pas des éléments orbitaux du satellite. Sa contribution sera donc nulle dans les équations de Lagrange. La fonction de forces que nous allons utiliser peut donc s'écrire

$$(4) \quad R_3 = km' \frac{r^2}{r'^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 S - \frac{1}{2} \right) = n'^2 a^2 \left(\frac{a'}{r'} \right)^3 \left(\frac{r^2}{a^2} \right) \left(\frac{3}{2} \cos^2 S - \frac{1}{2} \right) m',$$

a' est le demi-grand axe de la Lune.

R_3 peut s'exprimer à l'aide des paramètres orbitaux classiques. En particulier, c'est une fonction périodique de l'anomalie moyenne M du satellite. Il est donc possible de la développer en série de Fourier par rapport à M . Nous conserverons le terme constant de ce développement car les autres termes conduisent à des effets à courte période très petits et négligeables. Soit R_4 ce terme. Nous le développerons par rapport aux excentricités de l'orbite lunaire et de l'orbite du satellite

en négligeant e'^2 et e^3 . Ce développement a déjà été publié par Kozai [54] ⁽²⁾. Il est de la forme

$$(5) \quad R = \sum_n a_n \cos(i\Omega + j\omega + k\Omega' + l\omega' + m\lambda'),$$

i, j, k, l, m étant des entiers positifs, négatifs ou nuls. Les quantités Ω, ω et Ω', ω' représentent l'ascension droite du nœud ascendant de l'orbite et l'argument du périée, respectivement du satellite et de la Lune. λ' est la longitude de la Lune, c'est-à-dire la somme de l'argument du périée et de l'anomalie moyenne. L'équateur terrestre sert de référence aussi bien pour les éléments du satellite que pour ceux de la Lune.

Les fonctions $\Omega, \omega, \Omega', \omega', \lambda'$ sont des fonctions linéaires du temps. Par suite, les expressions

$$\frac{\partial R}{\partial e}, \quad \frac{\partial R}{\partial \omega}, \quad \frac{\partial R}{\partial \Omega}, \quad \frac{\partial R}{\partial i}$$

qui entrent dans les équations de Lagrange écrites avec le potentiel de la force perturbatrice [19, n° 32], auront la même forme que l'expression (5) écrite plus haut. Ce seront des formes trigonométriques élémentaires avec des arguments linéaires par rapport au temps. Il sera dès lors aisé d'intégrer les équations de Lagrange écrites sous cette forme en considérant le demi-grand axe et l'excentricité de l'orbite du satellite constant sur quelques révolutions. Nous ne publions pas les résultats à cause de la simplicité du calcul et du nombre très élevé des termes intervenant dans les expressions.

Nous avons procédé à titre de vérification à une intégration numérique des équations de Lagrange en utilisant le développement de la fonction perturbatrice tel qu'il a été donné par Musen [47]. L'accord est bon.

Nous avons calculé numériquement tous ces effets. Ils sont en général très petits, mais sûrement pas négligeables. Nous donnons leur valeur dans le tableau XVI, pour la période du 8 au 15 juillet 1962. Dans ce tableau, on trouvera aussi la valeur d'autres effets perturbateurs dont on aura besoin dans la suite de l'étude.

⁽²⁾ Nous avons refait avec M^{lle} N. Tallin que nous remercions ici, le calcul de Kozai. Nos expressions sont en accord avec les siennes à un signe près sur un terme : nous trouvons

$$- \sin i \sin^2 \frac{i}{2} \sin i' \cos^2 \frac{i'}{2} \cos(2\lambda' + 2\omega - \Omega - \Omega')$$

(Kozai [54], p. 9 dans B).

TABLEAU XVI.
« Écho I » : Variations des éléments orbitaux, 8-15 juillet 1962 (84 révolutions)

Effets perturbateurs.	Δa (km).	Δe (rad).	Δi (rad).	$\Delta \Omega$ (rad).	$\Delta \omega$ (rad).	ΔM (rad).
Variation des termes séculaires	$J_2 \begin{cases} 1082, 20.10^{-6} \\ 1082, 70 \end{cases} \dots$	-	-	-0,381 547	+0,366 395	+0,107 325
	$J_2^2 \begin{cases} 1082, 21 \\ 1082, 70 \end{cases} \dots$	-	.	-0,381 691	+0,366 533	+0,107 366
	$J_4 \begin{cases} 2, 10.10^{-6} \\ 1, 64 \end{cases} \dots$	-	-	-0,000 322	+0,000 478	+0,000 077
	$J_4 \begin{cases} 2, 10.10^{-6} \\ 1, 64 \end{cases} \dots$	-	-	-0,000 323	+0,000 479	+0,000 077
Variation des termes à longue période	$J_3 \dots$	-0,000 202	-0,000 007	-	-0,000 069	-0,000 001
	$J_2, J_4 \dots$	+0,000 160	+0,000 006	-	-0,000 551	-0,000 001
	$J_2, J_3, J_4, J_5 \dots$	-0,000 045	-0,000 001	-0,000 003	-0,003 850	-
	$J_2, J_3, J_4, J_5 \dots$	+0,000 004	+0,000 002	+0,000 002	+0,002 600	+0,001 253
Amplitude à longue période : $J_5 \dots$	-	+0,001 370	+0,000 186	+0,000 005	+0,000 095	-
Pression radiation solaire.....	-	-0,000 047	-0,7 10 ⁻⁷	-0,000 225	+0,048 900	-0,051 400
Frottement atmosphérique.....	-0,580	-	-	-0,000 048	+0,000 390	+0,028 300
Erreur constante	$\Delta a_0 = 0,106 \text{ km} \dots$	-	-	+0,000 002	-0,000 004	-0,001 000
initiale	$\Delta e_0 = 10^{-6} \text{ rad} \dots$	+0,000 100	-	-0,000 006	+0,000 006	+0,000 001
Action de la Lune.....	$\Delta i_0 = 10^{-6} \text{ rad} \dots$	-	+0,000 001	+0,000 004	-0,000 014	-0,000 009
Action du Soleil.....	-	-0,000 005	-0,000 013	-0,000 011	+0,000 007	-
	-	+0,000 0004	+0,000 003	-0,000 015	-0,000 013	-

RÉSULTANTE DES EFFETS DES DIFFÉRENTES PERTUBATIONS. — Après l'étude individuelle de chaque perturbation, il faut maintenant traiter le problème globalement c'est-à-dire tenir compte des actions mutuelles et réciproques de chaque effet perturbateur. A l'heure actuelle, il n'existe pas de théorie analytique qui tienne compte à la fois de toutes les perturbations auxquelles est soumis le satellite. Les théories développées en tenant compte du frottement atmosphérique et de la pression de radiation solaire ne sont pas encore satisfaisantes au point de vue pratique, car elles reposent sur des hypothèses de base trop simplistes, surtout dans le cas d'un satellite comme *Écho I*. Nous allons donc utiliser des théories limitées au problème du mouvement d'un point matériel soumis au seul champ de gravitation terrestre, et nous indiquerons une méthode, qui permettra de tenir compte en outre des perturbations, mais cette fois de façon purement numérique.

Faisons d'abord une remarque. Les théories du mouvement d'un corps dans le champ de gravitation terrestre ont été développées, soit à partir de la méthode de Hansen (Musen [61]), soit à partir des équations de Lagrange (Kozai [62]), soit à partir de la méthode de von Zeipel (Brouwer [31]). Il n'est pas évident qu'elles soient équivalentes, citons à ce propos les travaux de Fischer [63] et de Message [64], mais d'après leurs conclusions, on peut dire qu'il y a accord jusqu'à l'approximation du deuxième ordre; au-delà la vérification n'a pas été faite, mais nous ne nous sommes pas servis d'approximation d'ordre supérieur. Notons aussi qu'il est nécessaire de faire très attention aux constantes d'intégration qui n'ont aucune raison d'être les mêmes d'une théorie à une autre, bien que parfois d'interprétation géométrique très voisine. Ainsi la différence entre les demi-grands axes moyens de la théorie de Brouwer et de celle de Kozai est de l'ordre de J_2 et peut atteindre 1 km.

Calcul numérique. — Détaillons maintenant la manière de calculer les variations des éléments orbitaux au cours du temps en tenant compte des autres perturbations.

Il faut soigneusement distinguer deux stades dans le calcul.

Dans un premier stade nous calculons les éléments orbitaux. Grâce aux observations faites, nous connaissons donc les variations de ces éléments orbitaux.

Dans un deuxième stade, à partir des constantes d'intégration initiales connues par l'observation, nous nous proposons de calculer les variations théoriques des éléments orbitaux. Ne disposant pas de théorie analytique complète, il faudrait faire une intégration numérique au moins partielle; mais il est possible de procéder différemment. Comme nous l'avons dit, nous connaissons la valeur des éléments orbitaux pour un nombre fini d'époques. Entre ces époques, nous pouvons interpoler la valeur des éléments et finalement connaître les éléments à tout instant. Ceci nous

permet de calculer l'effet individuel de chaque perturbation, puis d'en faire la somme; il suffit en effet d'utiliser les équations de Lagrange. Considérons, par exemple, la première équation, relative au demi-grand axe : elle est de la forme

$$\frac{da}{dt} = A.R + B.S,$$

A et B sont fonctions des éléments orbitaux;

R et S sont deux des composantes de la force perturbatrice.

On en déduit la variation Δa en fonction du temps t

$$\Delta a = \int_0^T \frac{da}{dt} dt = \int_0^T (A.R + B.S) dt.$$

Si nous utilisons les éléments orbitaux donnés par l'observation, les fonctions $A(t)$, $B(t)$, $R(t)$, $S(t)$ sont connues et la quantité Δa est rigoureusement calculable par une simple quadrature.

Il est ensuite tout à fait légitime de décomposer R et S en leurs composantes individuelles (aplatissement terrestre, frottement atmosphérique, pression de radiation solaire, etc.). D'après les propriétés de linéarité de l'intégrale ci-dessus, la somme totale sera égale aux sommes partielles et finalement nous pouvons calculer le rôle individuel de chaque perturbation aussi bien que leur somme.

Calcul des intégrales et de leur somme, approximations faites. — Précisions maintenant certaines approximations que nous avons dû faire dans ce calcul.

1° Quand nous décomposons R et S en parties élémentaires (aplatissement terrestre, frottement atmosphérique, etc.) nous ne tenons compte que des perturbations principales et nous négligeons les forces électromagnétiques, les forces correspondantes aux termes élevés du potentiel et d'autres forces encore. Si ceci n'est pas valable, nous sommes tentés dans la phase d'ajustement de la théorie et de l'observation d'attribuer au frottement atmosphérique ou à la pression de radiation solaire par exemple, des effets dont ils ne sont pas l'origine. Il faut donc être prudent. Nous avons négligé ici de tout ce qu'il était légitime de faire, soit en nous référant à nos propres calculs, soit en nous rapportant à d'autres travaux; mais bien que cette question soit très avancée aujourd'hui, elle ne doit pas être considérée comme définitivement réglée.

2° Les fonctions $A(t)$, $R(t)$, ne sont connues que pour des valeurs discrètes, c'est-à-dire aux époques où les éléments osculateurs ont été calculés; entre ces époques nous interpolons. D'autres part, ces valeurs sont entachées d'erreurs puisqu'elles sont déduites des observations. Enfin dans le calcul numérique nous avons remplacé les fonctions $A(t)$,

$R(t)$, par leurs valeurs corrigées des termes à courte période, c'est-à-dire par leurs valeurs moyennes.

Il va de soi que nous avons cherché à estimer numériquement l'ordre de grandeur des erreurs introduites. Nous nous en sommes expliqué dans le présent chapitre. Nous pensons que sur une révolution les erreurs ne doivent pas dépasser quelques centièmes de la valeur du résultat. Nous avons d'ailleurs dit que des incertitudes liées à la nature physique du problème (caractéristiques mal connues du satellite, forme, constante aérodynamique, pouvoir réflecteur, etc.) ne permettaient pas une plus grande précision.

Détaillons maintenant le calcul proprement dit de la quadrature; nous avons dû procéder différemment suivant le type de perturbation.

Cas de la pression de radiation solaire et du frottement atmosphérique. — L'intégrale a été calculée numériquement de révolution en révolution, c'est-à-dire que nous avons écrit

$$\int_0^T f(t) dt = \int_0^{T_1} f(t) dt + \int_{T_1}^{T_2} f(t) dt + \dots + \int_{T_n}^T f(t) dt,$$

$T_1, \dots, T_n$ étant les différentes époques de passage au périhélie, époques définies par la condition $M' = 0$. M' est l'anomalie moyenne corrigée de ses termes à courte période dus à l'aplatissement terrestre. Ainsi que nous l'avons déjà dit dans ce chapitre, le calcul sur une révolution se fait par la méthode des trapèzes. Cette méthode est en général satisfaisante, si la fonction $f(t)$ conserve toujours le même signe. Si la fonction $f(t)$ est périodique, il peut se faire que le calcul de l'intégrale se présente comme la différence de deux nombres pratiquement égaux A et B. Dans ce cas, la valeur trouvée pourrait n'être pas significative, compte tenu des erreurs faites respectivement sur A et sur B. Dans le cas précis de notre exemple numérique où la durée de l'intégration est relativement courte, nous ne pensons pas que des erreurs aient été ainsi introduites.

Cas des perturbations luni-solaires. — L'intégrale a été décomposée révolution par révolution, mais le calcul a été fait en utilisant une primitive de la fonction $f(t)$.

Notons que dans ces deux cas, il n'est pas toujours nécessaire de calculer les variations révolution par révolution, mais seulement de n en n révolutions, n pouvant être compris entre 2 et 10 par exemple.

Cas du potentiel terrestre. — Soient $a, e, i, \Omega, \omega, M$, les éléments osculateurs à un instant t et $a'', e'', i'', \Omega'', \omega'', M''$, les éléments moyens instantanés correspondants calculés comme il a été dit dans le chapitre I. Les éléments correspondant à l'instant t_0 sont notés avec un indice 0. Nous raisonnons, à titre d'exemple, sur l'anomalie moyenne. En l'absence des autres

perturbations, la solution peut se mettre sous la forme suivante (théorie de Brouwer) :

$$(1) \quad \Delta M = f(a''_0, e''_0, i''_0) (T - t_0) + L_M + C_M,$$

où L_M et C_M représentent les termes à courte et à longue période.

Puisque le satellite est soumis à d'autres perturbations, ceci n'est vrai que pendant un temps court, a'' , e'' , i'' , évoluant lentement.

Par suite, la théorie de Brouwer restant vraie à chaque instant, nous devons écrire la relation (1) sous la forme

$$(2) \quad \Delta M = \int_{t_0}^T f(a'', e'', i'') dt + L_M + C_M.$$

L'intégrale peut s'écrire encore :

$$(3) \quad \int_{t_0}^T \left[f(a''_0, e''_0, i''_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial a} \right)_{t_0} \Delta a(t) + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial i} \right)_{t_0} \Delta i(t) \right] dt$$

ou

$$(4) \quad f(a''_0, e''_0, i''_0) (T - t_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial a} \right)_{t_0} \int_{t_0}^T \Delta a(t) dt + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial i} \right)_{t_0} \int_{t_0}^T \Delta i(t) dt;$$

$\Delta a(t)$, $\Delta e(t)$, $\Delta i(t)$ représentent les variations de a , e , i , en fonction du temps.

Ce développement de Taylor est limité au premier ordre. Les dérivées $\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}$ sont de l'ordre de $\frac{1}{a} \frac{\partial f}{\partial a}$, donc environ 10 000 fois plus petits que les $\frac{\partial f}{\partial a}$; les $\frac{\partial^2 f}{\partial e^2}$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial i^2}$ sont du même ordre que les $\frac{\partial f}{\partial e}$ ou $\frac{\partial f}{\partial i}$, mais les Δe ou Δi restent inférieurs ici à $0,5 \cdot 10^{-3}$ et 10^{-4} , les $\frac{\partial^2 f}{\partial e^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial i^2}$ restent inférieurs à $0,25 \cdot 10^{-6}$ et 10^{-8} . D'après les valeurs des dérivées que nous avons calculées et données dans le tableau XVII, nous voyons que sur une dizaine de jours l'approximation faite est légitime.

TABLEAU XVII.

« *Écho I* », passage du 8 juillet 1962.

	$\dot{\Omega}$.	$\dot{\omega}$.	$\dot{M}$.
$\frac{\partial}{\partial a} \dots \dots$	$+2,9 \cdot 10^{-10}$	$-6,5 \cdot 10^{-10}$	$-1,7 \cdot 10^{-7}$
$\frac{\partial}{\partial e} \dots \dots$	$-1,0 \cdot 10^{-7}$	$+1,0 \cdot 10^{-7}$	$+2,2 \cdot 10^{-8}$
$\frac{\partial}{\partial i} \dots \dots$	$+7,1 \cdot 10^{-7}$	$-2,4 \cdot 10^{-6}$	$-1,4 \cdot 10^{-6}$

[Unités : rad, km, s.]

On obtiendrait des équations analogues pour l'ascension droite du nœud et l'argument du périée. Pour les autres éléments, les équations seraient encore simplifiées, puisqu'il n'y a pas de termes séculaires.

La figure 13 donne graphiquement la résultante des différents effets en fonction du nombre de révolutions.

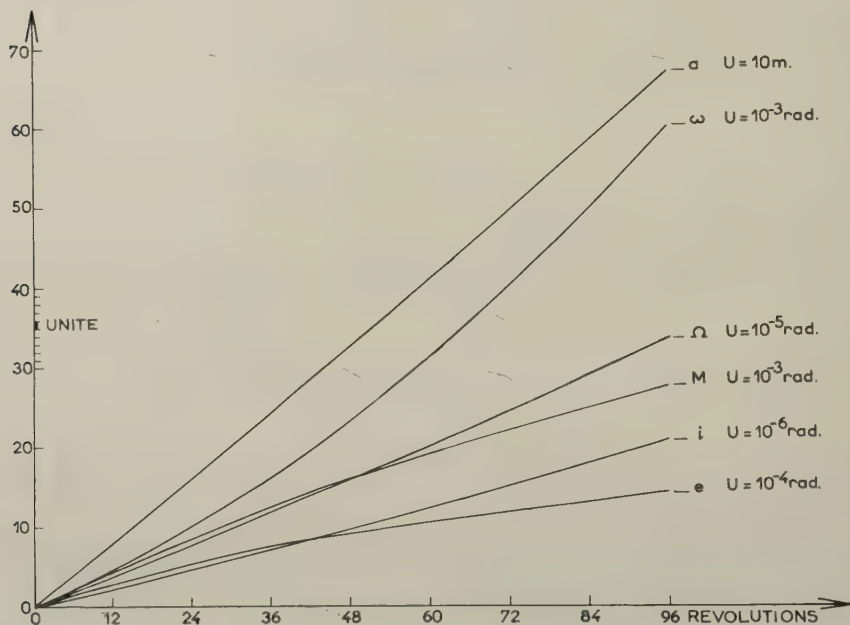


Fig. 13. — Résultante des différentes perturbations en fonction du nombre de révolutions (*Écho I*, 8-15 juillet 1962).

DÉTERMINATION DE J_2 ET J_3

PRINCIPE DE LA MÉTHODE. — D'après le paragraphe précédent, nous sommes à même de calculer les variations théoriques des éléments orbitaux. A un instant t quelconque, il est possible de calculer ces éléments et de les comparer aux éléments observés. En pratique à ce stade, il ya toujours un désaccord. Il est normal et c'est précisément lui qui nous permet de calculer J_2 et J_3 .

Raisonnons sur une quantité comme l'ascension droite du nœud. D'après ce qui précède, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \Omega = & f(a''_0, e''_0, i''_0) (T - t_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial a} \right)_{t_0} \int_{t_0}^T \Delta a(t) dt + \dots \\ & + \left(\frac{\partial f}{\partial i} \right)_{t_0} \int_{t_0}^T \Delta i(t) dt + L_\Omega + C_\Omega + F_\Omega + P_\Omega + S_\Omega + \Omega''_0, \end{aligned}$$

L_Ω et C_Ω sont les termes à longue et à courte période;

F_Ω est la variation de Ω due au frottement atmosphérique;

P_Ω est la variation de Ω due à la pression de radiation solaire;

S_Ω est la variation de Ω due aux effets luni-solaires;

$\Delta a, \Delta e, \Delta i$, les sommes des variations de a, e, i , dues aux effets des différentes perturbations.

Nous savons que toutes les quantités F_i ont la densité moyenne au périégée ρ_0 en facteur, et que les quantités P_i , ont la quantité $\frac{S}{m}$ (rapport de la section de choc sur la masse) en facteur; i représente un quelconque des six éléments orbitaux.

D'autre part, la fonction $f(a''_0, e''_0, i''_0)$ peut se mettre sous la forme

$$J_2 g(a''_0, e''_0, i''_0) + h(a''_0, e''_0, i''_0);$$

de même,

$$L_\Omega = J_3 L_\Omega^1 + L_\Omega^2.$$

Finalement, Ω peut se mettre sous la forme linéaire suivante :

$$\Omega = J_2 C_\Omega^1 + J_3 C_\Omega^2 + \rho_0 C_\Omega^3 + \frac{S}{m} C_\Omega^4 + C_\Omega^5,$$

les C_Ω^i sont des fonctions des éléments orbitaux et du temps.

D'une façon analogue, on montrerait que pour les autres éléments on a :

$$a = \rho_0 C_a^3 + \frac{S}{m} C_a^4 + a''_0.$$

$$e = J_3 C_e^2 + \rho_0 C_e^3 + \frac{S}{m} C_e^4 + C_e^5 + e''_0,$$

$$i = J_3 C_i^2 + \rho_0 C_i^3 + \frac{S}{m} C_i^4 + C_i^5 + i''_0,$$

$$\omega = J_2 C_\omega^1 + J_3 C_\omega^2 + \rho_0 C_\omega^3 + \frac{S}{m} C_\omega^4 + C_\omega^5 + \omega''_0,$$

$$M = J_2 C_M^1 + J_3 C_M^2 + \rho_0 C_M^3 + \frac{S}{m} C_M^4 + C_M^5 + M''_0.$$

La résolution de ce système va nous permettre d'améliorer les quantités, $J_2, J_3, \rho_0, \frac{S}{m}, a''_0, e''_0, i''_0, \Omega''_0, \omega''_0, M''_0$.

Mettons les équations sous la forme suivante :

$$\delta a = \delta \rho_0 C_a^2 + \delta \frac{S}{m} C_a^4 + \delta a''_0,$$

$$\delta e = \delta J_3 C_e^2 + \delta \rho_0 C_e^3 + \delta \frac{S}{m} C_e^4 + \delta e''_0,$$

$$\delta i = \delta J_3 C_i^2 + \delta \rho_0 C_i^3 + \delta \frac{S}{m} C_i^4 + \delta i''_0,$$

$$\delta \Omega = \delta J_2 C_\Omega^1 + \delta J_3 C_\Omega^2 + \delta \rho_0 C_\Omega^3 + \delta \frac{S}{m} C_\Omega^4 + C_\Omega^5 (\delta e''_0, \delta i''_0, \delta a''_0) + \delta \Omega''_0,$$

$$\delta \omega = \delta J_2 C_\omega^1 + \delta J_3 C_\omega^2 + \delta \rho_0 C_\omega^3 + \delta \frac{S}{m} C_\omega^4 + C_\omega^5 (\delta e''_0, \delta i''_0, \delta a''_0) + \delta \omega''_0,$$

$$\delta M = \delta J_2 C_M^1 + \delta J_3 C_M^2 + \delta \rho_0 C_M^3 + \delta \frac{S}{m} C_M^4 + C_M^5 (\delta e''_0, \delta i''_0, \delta a''_0) + \delta M''_0.$$

où δa , δe , δi , $\delta \Omega$, $\delta \omega$, δM représentent les écarts entre les valeurs déterminées par l'observation et les valeurs déterminées par ce calcul, et où le symbole δ devant les autres grandeurs représente l'écart entre la valeur exacte et la valeur adoptée.

Nous obtenons un système d'équations linéaires avec un nombre surabondant d'équations par rapport au nombre d'inconnues. Chaque détermination d'éléments osculateurs donne en effet un jeu d'équations.

Il ne faut pas résoudre d'emblée un tel système. La précision des seconds membres est en effet variable : ainsi $\delta \Omega$ est connu en moyenne à $3 \cdot 10^{-5}$ rad, $\delta \omega$ à $3 \cdot 10^{-4}$ rad. Les valeurs numériques des fonctions C_i varient dans des proportions très importantes d'un type d'équation à un autre. Ainsi C_a^4 est nul, alors que C_ω^4 ou C_M^4 sont très importants ; la pression de radiation solaire ne joue ici aucun rôle sur le demi-grand axe, le satellite étant toujours éclairé ; il a, par contre, un grand effet sur le périégée et l'anomalie moyenne.

Tout cela montre que la résolution d'un tel système nécessiterait une pondération des équations *a priori* très délicate et les mauvaises déterminations de certaines inconnues retentiraient sur les autres par suite des corrélations réciproques. Il faut procéder différemment. Nous connaissons à l'avance l'ordre de grandeur de la solution ; nous savons par exemple que J_2 est sûrement compris entre $1082,4 \cdot 10^{-3}$ et $1082,9 \cdot 10^{-3}$, J_3 entre $2,0 \cdot 10^{-6}$ et $3,0 \cdot 10^{-6}$; nous savons de même que la quantité $\frac{S}{m}$ est connue à quelques pour-cent près ; nous connaissons également les erreurs probables de $\delta a''_0$, $\delta e''_0$, $\delta i''_0$, $\delta \Omega''_0$, $\delta \omega''_0$, $\delta M''_0$.

Ceci permet de simplifier considérablement la résolution du système. Ainsi $\delta \frac{S}{m} C_a^4$, $\delta \rho_0 C_e^3$, ... et d'autres termes sont négligeables dans le système. Pour le justifier, il suffit de calculer les variations des éléments sous l'influence des diverses perturbations (tableau XVI).

Le critère permettant de négliger un terme dépend évidemment de la précision avec laquelle on connaît le second membre de l'équation.

Une perturbation ayant un effet de 10^{-5} rad est négligeable pour l'argument du périhélie connu seulement à 2 ou $3 \cdot 10^{-4}$ rad, tandis qu'elle ne l'est pas pour l'inclinaison connue à environ $5 \cdot 10^{-6}$ rad.

Nous avons pu finalement remplacer le système par le suivant :

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \delta a = \delta \rho_0 C_a^3, \\
 (2) \quad & \delta e = \delta J_3 C_e^2 + \delta \frac{S}{m} C_e^4 + \delta e''_0, \\
 (3) \quad & \delta i = \delta J_3 C_i^2 + \delta \frac{S}{m} C_i^4 + \delta i''_0, \\
 (4) \quad & \delta \Omega = \delta J_2 C_\Omega^1 + \delta \Omega''_0, \\
 (5) \quad & \delta \omega = \delta J_3 C_\omega^2 + \delta \frac{S}{m} C_\omega^4 + \delta \omega''_0, \\
 (6) \quad & \delta M = C_M^5 (\delta a''_0, \delta e''_0, \delta i''_0) + \delta M''_0.
 \end{aligned}$$

Une fois le modèle d'atmosphère ajusté et $\delta a''_0$ calculé comme il a été dit, les équations (2), (3), (5) nous ont servi à calculer $\delta J_3, \delta \frac{S}{m}, \delta e''_0, \delta i''_0, \delta \omega''_0$, les équations $\delta \Omega$ à calculer δJ_2 et $\delta \Omega''_0$.

Remarque. — En pratique, ρ_0 et a''_0 étaient au départ connus avec une précision insuffisante pour que les termes mis en cause soient effectivement négligeables au premier ordre. Nous avons dû procéder par itération. Le satellite étant toujours éclairé, l'effet de la pression de radiation solaire est nul et les équations en a (demi-grand axe) nous permettent d'ajuster le modèle d'atmosphère, d'où ρ_0 . Les équations en M nous permettent ensuite de calculer $\delta a''_0$. Dans les deux cas, en effet, ce sont les deux phénomènes responsables des principaux écarts δa ou δM . En reportant ces valeurs dans le système d'équations, on obtient un système où les écarts $\delta a, \delta e, \delta i, \delta \omega, \delta M$ sont beaucoup plus petits.

Le tableau XVIII donne l'écart entre les valeurs théoriques et les valeurs observées; ces écarts vont nous servir à déterminer les nouvelles valeurs des constantes dans la suite de l'étude.

RÉSULTATS. — La résolution des équations du type $\delta \Omega$ nous a permis de calculer J_2

$$J_2 = 1082,47 \cdot 10^{-6} \pm 0,24 \cdot 10^{-6}.$$

Nous avons dû éliminer les éléments déduits de deux passages pour lesquels les résidus entre les éléments observés et calculés étaient pratiquement égaux à trois fois le résidu moyen des éléments déduits des autres passages; c'est en principe légitime. Nous avons préféré cette façon de faire à une pondération, car la précision avec laquelle est définie la position des nœuds paraît assez homogène, sauf précisément dans ces

deux cas où il faut craindre une erreur systématique plus importante due sans doute à un guidage particulièrement defectueux.

TABLEAU XVIII.

Date : juillet 1962.	N° des clichés.	(O-C) _o (10 ⁻³ rad).	(O-C) _i (10 ⁻³ rad).	(O-C) _{II} (10 ⁻³ rad).	(O-C) _{III} (10 ⁻³ rad).	(O-C) _{IV} (10 ⁻³ rad).
8.020...	33-34	- 2	+ 4	0	0	0
8.900...	33-36	+ 8	+ 14	0	+ 6	- 7
10.033...	37-38	- 10	- 13	+ 3	- 31	+ 35
10.916...	37-60	- 1	- 2	+ 3	+ 3	- 1
11.009...	61-63	- 3	- 6	+ 5	+ 3	- 3
11.086...	61-65	+ 12	+ 24	- 9	+ 48	- 52
12.059...	66-67	+ 7	+ 8	0	+ 21	- 22
12.933...	68-70	0	+ 1	+ 4	- 1	+ 5
14.931...	73-75	- 13	- 9	+ 7	- 16	+ 24
10.959...	(39-60) (61-63)	+ 4	- 2	- 1	+ 6	- 6
11.043...	(61-63) (61-65)	0	- 9	+ 4	- 4	+ 1
12.974...	68-70-71	+ 7	- 3	- 4	+ 18	- 17
9.999...	103-104 Str.	- 12	+ 2	- 11	- 20	+ 37

Nous avons tenu compte des effets perturbateurs de J_1 et J_2 , mais nous avons pu négliger les effets de J_3 , J_4 , J_5 , et des autres harmoniques. Remarquons que l'effet des harmoniques ne décroît pas toujours avec leur degré; ici le rôle de J_1 est plus grand que celui de J_2 .

Les valeurs adoptées pour J_1 , J_2 sont celles de Kozai 1964 [58]; ces valeurs sont proches de celles de King-Hele, 1964 [59].

La résolution des équations donne pour J_3 la valeur de

$$J_3 = - 1,24.10^{-6} \pm 1,55.10^{-6}.$$

L'erreur probable paraîtra particulièrement importante, mais il faut rappeler qu'elle a une probabilité de 95 % de ne pas être dépassée (loi de Student). Nous avons toujours adopté ce taux de probabilité dans ce travail, contrairement à un usage plus courant de 60 %. Nous en avons exposé les raisons dans le chapitre II. Dans ce dernier cas, on trouverait une erreur probable de : $0,52.10^{-6}$.

Il faut tenir compte des termes à longue période introduits par J_1 , J_2 , J_3 . Les valeurs adoptées sont toujours celles de Kozai 1964.

Nous avons fait un deuxième calcul en supposant connu le rapport de la section du satellite à la masse et en calculant entièrement par la théorie l'effet de la pression de radiation solaire. Nous désirions étudier les corrélations entre deux causes des variations des éléments orbitaux. Nous avons trouvé

$$J_3 = - 2,68.10^{-6} \pm 0,97.10^{-6}.$$

Étant donné l'ordre de grandeur des erreurs probables, on peut dire que ces valeurs sont compatibles et que la corrélation entre l'effet de J_2 et celui de la pression de radiation n'est pas trop grande.

Dans ces deux calculs, nous avons dû éliminer les mêmes éléments que dans le calcul de J_2 , ce qui confirme que ces éléments étaient entachés d'erreurs systématiques.

Nous devons encore ajouter une remarque sur la résolution de ce dernier système.

Les quantités au second membre sont entachées d'erreurs. Nous supposons que ces erreurs suivent la Loi Normale, mais il n'est pas possible d'attribuer à toutes ces quantités le même poids. En effet, l'erreur à craindre sur chacune d'elles varie d'une détermination à une autre dans des proportions parfois importantes de 1 à 5, parfois de 1 à 10. Nous avons eu l'occasion d'en voir les raisons, précision variant avec l'élément orbital utilisé, qualité des clichés photographiques, nombre d'observations utilisées, etc. Nous leur avons donc attribué un poids inversement proportionnel à l'erreur probable.

Pour ces calculs, les nouvelles valeurs de GM et du rayon équatorial R proposées par l'U. A. I. en 1964 ont été adoptées [29].

3. Détermination de la densité atmosphérique. -- Comme sous-produit de ce calcul, nous avons été amené à déterminer la valeur moyenne de la densité sur cette période. Elle est directement déduite des variations observées du demi-grand axe moyen instantané. C'est là un avantage. On évite certaines difficultés qui se présentent lorsqu'elle est déduite des perturbations de l'anomalie moyenne; en effet, l'anomalie moyenne est souvent mal connue à cause de la position du périée, elle-même d'autant plus mal définie que l'excentricité est plus faible. D'autre part, dans ce dernier cas, il est nécessaire de séparer dans les perturbations de M la part due aux variations du demi-grand axe, des autres perturbations de toute origine qui sont souvent importantes et pas toujours bien connues. A partir des observations d'une seule station, il est possible de déterminer des densités atmosphériques et nous sommes obligés de contredire ici Sol. H. Genatt dans les conclusions de son étude de 1963 [57]. Pour la période du 8 au 15 juillet 1962 nous avons trouvé une valeur moyenne de la densité (ρ) :

$$\rho = 2,3 \cdot 10^{-18} \text{ g/cm}^3$$

correspondant aux caractéristiques moyennes suivantes :

- Flux solaire à 10,7 cm : $S = 83 \cdot 10^{-22} \text{ W/m}^2/\text{c/s}$;
- Heure locale, 15 h; altitude, 1200 km; latitude, 30°.

Durant cette période, le flux solaire à 10,7 cm, utilisé comme indicateur de l'activité solaire, a peu varié et a oscillé entre 80 et 85 $\cdot 10^{-22} \text{ W/m}^2/\text{c/s}$.

L'activité géomagnétique caractérisée par l'indice géomagnétique a été aussi très calme. La valeur de la densité est environ cinq fois celle prévue par le modèle de Harris et Priester, 1962 [33].

4. **Remarque.** — Nous devons signaler une difficulté que nous avons rencontrée et que nous n'avons pas résolue de manière satisfaisante. Nous disposons d'observations très continues sur 8 jours; à cette période succéda une période de mauvais temps pendant laquelle nous n'avons pu faire aucune observation, puis de nouveau une brève période favorable pour reprendre quelques clichés photographiques. Nous avons donc cherché à raccorder par la théorie les éléments déduits de ces périodes distantes d'une dizaine de jours. Mais si l'accord peut approximativement se faire pour certains éléments, α , e , ω , M et cela pour une part parce qu'il existe des paramètres comme la valeur de la densité et de la pression de radiation qui permettent d'ajuster la théorie et l'observation, il n'en est plus de même pour l'inclinaison et l'ascension droite du nœud; en particulier, il existe un écart de $0^{\circ},028$ pour l'inclinaison. Même si l'on admet que l'intégration peut être erronée de 15 ou 20 %, ce que nous pensons difficilement admissible ici, même si l'on tient compte de l'effet de la pression solaire rediffusée ou réfléchi par la Terre et auquel les auteurs, comme Shapiro, Wyatt, sont unanimes à ne pas attribuer des effets supérieurs à 20 % des effets de la pression directe, on ne peut expliquer cet écart.

Il faut donc chercher une autre cause.

Il se trouve que cet écart survient après une période où le satellite était constamment éclairé; nous sommes donc amené à penser que le passage dans l'ombre a pu déformer le ballon et que le modèle sphérique est devenu, pour un temps, inadéquat. Rappelons, en effet, que l'influence de la forme du corps soumis à la pression de radiation est très importante. Il peut y avoir changement de signe dans la valeur numérique de l'effet perturbateur. Quoi qu'il en soit, ceci reste une hypothèse. Peut-être certains effets secondaires ont-ils été sous-estimés. La discussion reste ouverte. Nous voudrions signaler seulement que nous ne sommes pas les premiers à déceler de tels écarts entre la théorie et l'observation. Shapiro et ses collègues ont trouvé des écarts pouvant atteindre le même ordre de grandeur. Ils n'ont pas donné non plus d'explications satisfaisantes [55].

CONCLUSION

Finalement, nous pensons qu'étant donné le satellite envisagé (*Écho I*), la durée relativement courte et la précision des observations ($5''$ à $6''$), nous avons présenté dans ce travail tout ce qu'il était possible d'en déduire. Nous espérons aussi avoir dégagé quelques voies d'utilisation

des éléments osculateurs. En particulier, il est possible de déterminer les harmoniques du potentiel terrestre aussi bien que certaines anomalies importantes du champ de gravitation puisque nous avons observé les variations à courte période des éléments sous l'influence de l'aplatissement terrestre. Nous avons pu également calculer J_2 et J_3 . Les valeurs des densités déduites de ces méthodes le sont de manière satisfaisante. On retiendra seulement qu'il est nécessaire de disposer d'un matériel d'observation approprié.

Il paraît donc souhaitable que les stations d'observations judicieusement réparties à la surface de la Terre cherchent à effectuer des observations sur des arcs topocentriques aussi longs que possible. Il est certain que des difficultés pratiques sont inévitables et qu'en particulier il est souvent impossible de photographier des satellites d'altitude très basse, observables plus souvent au ras de l'horizon; mais la détermination des éléments osculateurs est sûrement possible pour toute une gamme de satellites d'altitude supérieure à une certaine limite de l'ordre de 4 à 500 km.

Nous souhaitons donc que de telles observations se développent en vue des utilisations proposées ici et de toutes celles qui pourront être proposées dans l'avenir.

Remerciements. — Ce travail a été fait à l'Observatoire de Paris (Section de Meudon) dans le Service des Satellites créé et dirigé par M. P. Muller, Service qui profite largement des crédits du Centre National des Études spatiales depuis la création de celui-ci. Nous y avons bénéficié de toutes les ressources dont M. P. Muller l'avait doté, en moyens et en personnels spécialisés (calcul électronique). Il a bien voulu nous faire profiter de sa grande expérience et nous encourager dans notre recherche. Qu'il trouve là l'expression de notre respectueuse gratitude.

M. J. Kovalevsky a bien voulu suivre pas à pas notre étude, tout particulièrement du point de vue théorique. Il nous a toujours guidé en maître et en ami. Nous lui en témoignons notre profonde reconnaissance.

Les calculs ont été exécutés au Centre de Calcul numérique de l'Observatoire de Paris-Meudon dirigé par M. J. Arsac et à l'Institut Blaise Pascal dirigé par M. de Possel. Nous avons pu également utiliser des programmes mis au point par M. J. Kovalevsky au Bureau des Longitudes. Aux Directeurs des Centres, nous exprimons nos respectueux remerciements.

La programmation des calculs sur ordinateurs électroniques a été faite par M. J. Collet dans la collaboration la plus étroite et la plus amicale. Les observations utilisées ont été assurées en grande partie par M. P. Muller. Le dépouillement (mesure des clichés et calculs) a été assuré par M^{me} Lauret, M^{lle} Tallin, MM. P. Muller, J. Collet, J. Balmino et nous-même. Nous avons utilisé aussi des observations faites et réduites à l'Observatoire de Strasbourg par M. A. Schmitt. Que tous soient ici très vivement remerciés.

Un tel travail suppose beaucoup de tâches matérielles annexes : perforation de cartes, dactylographie, dessins, courbes. A M^{me} Renaud, M^{lle} Plet, MM. Y. Boudon et M. N. Vu qui ont exécuté ces travaux avec grand soin et à tous les autres membres du Service des Satellites qui nous ont aidé, nous exprimons nos sincères remerciements.

J'adresse enfin mes remerciements très affectueux à ma femme qui a bien voulu prendre en charge quantité de détails ingrats.

Au moment de remettre le « bon à tirer », j'apprécie toute la qualité du travail de l'Imprimerie Gauthier-Villars. Qu'elle veuille trouver ici l'expression de ma gratitude.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] W. M. KAULA, *Reviews of Geophysics*, n° 4, 1964, p. 507-551.
- [2] W. PRIESTER, *I. U. T. A. M., Symposium*, Paris, 1962, p. 143-157.
- [3] L. G. JACCHIA, 1962, *variations in the Earth's Upper Atmosphere as revealed by Satellite Drag*, *Smith. Astron. Obs.*
- [4] G. VEIS et C. H. MOORE, *Smith. Astron. Obs.*, D. O. I., J. P. L. Seminar Proceedings.
- [5] R. H. MERSON, *I. U. T. A. M., Symposium*, Paris, 1962, p. 83.
- [6] A. S. SOCHILINA, *I. U. T. A. M., Symposium*, Paris, 1962, p. 202.
- [7] A. M. COOK, *The Use of Artificial Satellite for Geodesy*, Washington, 1962, p. 411.
- [8] J. KOVALEVSKY, *C.O.S.P.A.R., Space Research I*, Nice, 1960, p. 461.
- [9] J. KOVALEVSKY, *XIth International Astronautical Congress*, Stockholm, 1960, p. 32.
- [10] P. MULLER, *Bull. Astron.*, t. 22, fasc. 3, 1961, p. 156.
- [11] P. MULLER et F. BARLIER, *C. R. Acad. Sc.*, t. 251, 1960, p. 2886-2888.
- [12] P. MULLER et F. BARLIER, *Bull. Astron.*, t. 24, fasc. 1, 1963, p. 29.
- [13] G. VEIS, *Smith. Astron. Obs.*, 1963, Special Report No. 123.
- [14] A. DANJON, *Astronomie générale*, J. et R. Sennac éditeur, Paris, 1959.
- [15] D. DROUWER et G. M. CLEMENCE, *Methods of Celestial Mechanics*, Academic Press, New York and London, 1961.
- [16] J. KOVALEVSKY et F. BARLIER, *C. R. Acad. Sc.*, t. 252, 1961, p. 1273-1275.
- [17] F. BARLIER, *C.O.S.P.A.R., Space Research II*, Florence, 1961, p. 83.
- [18] I. G. IZSAK, *Smith. Astron. Obs.*, Special Report No. 73.
- [19] J. KOVALEVSKY, *Introduction à la Mécanique céleste*, Armand Colin, Paris, 1963.
- [20] Y. V. LINNIK, *Méthode des moindres carrés*, Dunod, Paris, 1963 (ouvrage traduit du russe).
- [21] L. ARBEY, *Bull. Astron.*, t. 14, 1949, p. 75-78.
- [22] P. MULLER, *Notes et informations*, Publications de l'Observatoire de Paris, fasc. XVIII, 1964.
- [23] P. MULLER et F. BARLIER, *The Use of Artificial Satellites for Geodesy*, Washington, 1962, p. 161.
- [24] L. SEHNAL, *The Use of Artificial Satellite for Geodesy*, Washington, 1962, p. 113.
- [25] R. H. MERSON, *I.U.T.A.M., Symposium*, Paris, 1962, p. 89.
- [26] A. SCHMITT, *Annales de l'Observatoire de Strasbourg*, t. 6, fasc. 2, 1964.
- [27] J. KOVALEVSKY, *C.O.S.P.A.R., Space Research II*, Florence, 1961, p. 91-97.
- [28] G. V. GROVES et M. J. DAVIES, *Astronautica C.*, p. 77.
- [29] AGENDA and DRAFT REPORT, *I. A. U.*, 1964, p. L.
- [30] Ph. D. MOULTON, *An introduction to Celestial Mechanics*, Macmillan, New York, 1914.
- [31] D. BROUWER, *Astron. J.*, 1959, n° 64, p. 378.
- [32] F. P. SCOTT, *The Use of Artificial Satellites*, Washington, 1962, p. 230.

- [33] I. HARIS et W. PRIESTER, *Theoretical models for the solar cycle, variations of the upper atmosphere*, Goddard. Space F. C., N. A. S. A., 1962.
- [34] I. I. SHAPIRO, *I.U.T.A.M., Symposium*, Paris, 1962, p. 257.
- [35] D. BROUWER et G. HORI, *Astron. J.*, 1961, n° 66.
- [36] M. J. DAVIES, *I.U.T.A.M., Symposium*, Paris, 1962, p. 111.
- [37] I. G. IZSAK, *Astron. J.*, 1960, n° 65, p. 355.
- [38] L. G. JACCHIA, *Smith. Astron. Obs.*, 1961, Special Report No. 62.
- [39] L. G. JACCHIA et J. SLOWEY, *Smith. Astron. Obs.*, Special Report, 1962, No. 84.
- [40] W. PRIESTER, *I.U.T.A.M., Symposium*, Paris, 1962, p. 143.
- [41] H. K. PAETZOLD et H. ZSCHÖRNER, *C.O.S.P.A.R., Space Research III*, Washington, 1962, p. 958.
- [42] D. G. KING-HELE, *Theory of Satellite Orbits in an Atmosphere*, 1964.
- [43] S. P. WYATT, *I.U.T.A.M., Symposium*, Paris, 1962, p. 180.
- [44] I. I. SHAPIRO, *J. Geophys. Research*, t. 68, 1963, p. 5349.
- [45] S. FERRAZ-MELLO, *XIV^e Congrès international astronautique*, Paris, 1963.
- [46] S. FERRAZ-MELLO, *C. R. Acad. Sc.*, t. 258, 1964, p. 463-466.
- [47] P. MUSEN, *J. Geophys. Research*, t. 65, 1960, p. 1391.
- [48] Y. KOZAI, *Smith. Astron. Obs.*, 1961, Special Report No. 56, p. 25.
- [49] Y. V. ZONOV, *C. R. Acad. Sc. U. R. S. S.*, Moscou, 1959, p. 118-124.
- [50] J. P. RICHARD, *Possibilités de vérification de la Relativité générale à l'aide des satellites artificiels terrestres*, Paris, 1963.
- [51] B. LAGO, *Séminaire du Bureau des Longitudes*, 3^e année, 1964, n° 5.
- [52] P. MULLER, *C. R. Acad. Sc.*, t. 257, 1963, p. 2613-2615.
- [53] ARNOLD, *C.O.S.P.A.R., Space Research V*, 1964 (sous presse).
- [54] Y. KOZAI, *Smith. Astron. Obs.*, Special Report No. 22.
- [55] P. E. ZADUNAISKY, I. I. SHAPIRO et H. M. JONES, *Smith. Astron. Obs.*, Special Report No. 61.
- [56] K. LASSOVSKY, *Smith. Astron. Obs.*, Special Report No. 74, p. 16.
- [57] Sol. H. GENATT, *Georgetown Observatory*, séries II, 1963, n° 14.
- [58] Y. KOZAI, *C.O.S.P.A.R., Space Research V*, Florence, 1964 (sous presse).
- [59] D. G. KING-HELE, *C.O.S.P.A.R., Space Research V*, Florence, 1964 (sous presse).
- [60] G. VEIS, *Smith. Astron. Obs.*, Special Report No. 59 and Special Report No. 147 (Introduction).
- [61] P. MUSEN, *J. Geophys. Research*, t. 64, 1959, p. 2271.
- [62] Y. KOZAI, *Astron. J.*, t. 64, 1959 b, p. 367.
- [63] D. FISCHER, *Astron. J.*, t. 68, 1963, p. 718.
- [64] P. J. MESSAGE, *Monthly Notices*, vol. 121, n° 1, 1960, p. 1-4.
- [65] G. N. DUBOSCHIN, *I.U.T.A.M., Symposium*, Paris, 1962, p. 14.
- [66] CATALOG OF PRECESELY REDUCED OBSERVATIONS, *Smith. Astron. Obs.*, Special Report No. 104, p. 38-39.

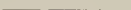
Ouvrages généraux utilisés.

- A. DANJON, *Astronomie générale*, J. et R. Sennac éditeur, Paris, 1959.
- D. BROUWER et G. M. CLEMENCE, *Methods of celestial Mechanics*, Academic Press, New York and London, 1961.
- J. KOVALEVSKY, *Introduction à la Mécanique céleste*, Armand Colin, Paris, 1963.
- Ph. D. MOULTON, *An Introduction to Celestial Mechanics*, Macmillan, New York, 1914.
- Y. V. LINNIK, *Méthode des Moindres carrés*, Dunod, Paris, 1963 (ouvrage traduit du russe).
- G. VEIS, *The Use of Artificial Satellites for Geodesy (Proceedings of the first international symposium on the use of the artificial satellites for Geodesy)*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1962.
- M. ROY, *Dynamique des Satellites (I.U.T.A.M., Symposium)*, Paris), Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1963.

DEUXIÈME THÈSE



PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.



Détermination de l'Unité Astronomique en Km

Vu et approuvé :

Paris, le 8 février 1965.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

Marc ZAMANSKY.

Vu et permis d'imprimer :

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

Jean ROCHE.



PARIS — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS & C^{ie}

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55

167734-65

Dépôt légal, Imprimeur, 1965, n° 1706.

Imprimé en France

PARIS — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS & C^{ie}

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55

167734-65

Dépôt légal, Imprimeur, 1965, n° 1706.

Imprimé en France